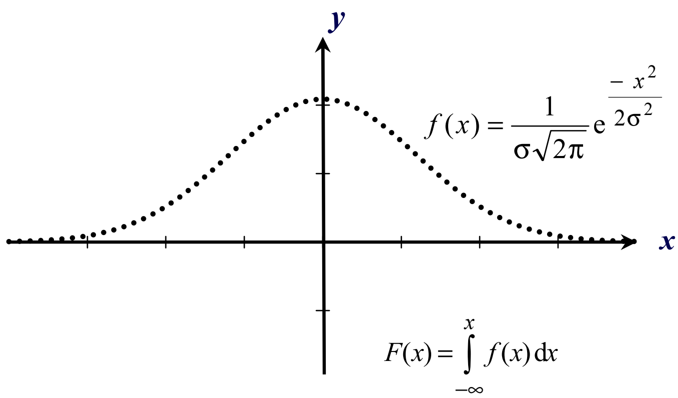
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**О. Б. Васюнина, Л. Д. Романова,
С. В. Самуйлова**

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие



ПЕНЗА 2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

О. Б. Васюнина, Л. Д. Романова,
С. В. Самуйлова

Расчетные задания по теории вероятностей

Учебно-методическое пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2009

УДК 519.21(075)
В20

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Математика»
ГОУВПО «Пензенская государственная технологическая академия»;

кандидат педагогических наук, профессор кафедры
«Теория и методика обучения математике»
ГОУВПО «Пензенский государственный педагогический университет
им. В. Г. Белинского»
М. А. Гаврилова

Васюнина, О. Б.

В20 Расчетные задания по теории вероятностей: учеб.-метод. пособие / О. Б. Васюнина, Л. Д. Романова, С. В. Самуйлова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 116 с.

Сформулированы основные определения теории вероятностей, приведены теоремы и формулы, необходимые для решения задач. Представлены 30 вариантов расчетных заданий. Даны с подробными объяснениями решения некоторых задач типового варианта.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначено для студентов технических и гуманитарных специальностей, изучающих соответствующий раздел курса высшей математики.

УДК 519.21(075)

Предисловие

В последние годы методы теории вероятностей все шире проникают в различные области естествознания и техники. Задачи выявления и исследования закономерностей, которым подчиняются реальные процессы и явления, возникают практически на каждом шагу. Этим объясняется то внимание, которое уделяется в настоящее время изучению соответствующего раздела курса вузовской математики студентами не только технических, но и гуманитарных специальностей.

Залог успешного овладения изучаемым курсом – активная самостоятельная работа студентов. Входящие в настоящее учебно-методическое пособие расчетные задания представлены 30 вариантами, что позволяет предложить каждому студенту группы индивидуальное задание. Каждый из предлагаемых вариантов обеспечивает семестровый курс. В том случае, когда раздел теории вероятностей излагается в меньшем объеме, расчетные задания подлежат сокращению. Определенная выборка заданий из варианта может быть использована для проведения контрольных работ при текущей аттестации студентов.

Помимо собственно расчетных заданий настоящее пособие включает краткие теоретические сведения. Здесь сформулированы основные определения теории вероятностей, представлены теоремы и формулы, необходимые для решения задач варианта. В приложениях данного учебно-методического пособия приведены таблицы значений функций, которые студенту предстоит использовать при выполнении расчетных заданий. Кроме того, в пособии даны с подробными объяснениями решения некоторых задач типового варианта.

Предлагаемое учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика». Пособие предназначено для студентов технических и гуманитарных специальностей, изучающих указанный раздел курса высшей математики.

Краткие теоретические сведения

1. Случайные события

1.1. Случайные события, операции над событиями

Теория вероятностей изучает модели экспериментов со случайными исходами (модели случайных экспериментов). Всякий случайный эксперимент (опыт, испытание) состоит в осуществлении некоторого вполне определенного комплекса условий и наблюдении результата. Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта (*случайное событие*).

При математической формализации модели случайного эксперимента с ним связывается некоторое *множество взаимоисключающих элементарных исходов* Ω, такое, что результатом испытания всегда является один и только один исход. Эти исходы *образуют полную группу попарно несовместных* элементарных событий. Множество Ω может быть *дискретным* (оно конечно или счетно) или *непрерывным* (например, некоторый конечный или бесконечный интервал на числовой прямой). Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как событие (возможно, и ненаблюдаемое).

Говорят, что событие A *произошло (наступило, осуществилось, реализовалось),* если результатом эксперимента явился элементарный исход $\omega_i \in A$ (*входящий* в A, *благоприятствующий* A). Событие, совпадающее с пустым множеством $\varnothing$, называется невозможным событием (V), а событие, совпадающее со всем множеством Ω, называется достоверным событием (U).

Поскольку событие отождествляется с множеством, то над событиями можно совершать операции, выполнимые над множествами, а именно:

$A \subset B$ (отношение включения множеств) – *событие* A *влечет за собой событие* B, т. е. событие B происходит всякий раз, как происходит событие A.

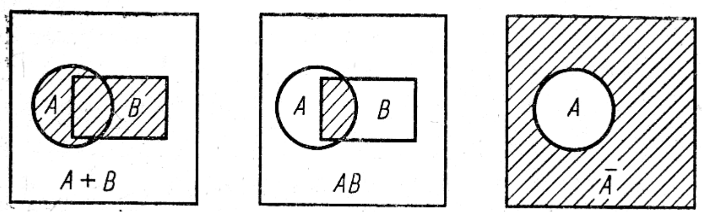
$A = B$ (отношение эквивалентности множеств) – *событие* A *тождественно событию* B, что возможно в том и только в том случае, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

$A+B$ (объединение множеств) – *сумма событий*. Это событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из двух событий A или B.

AB (пересечение множеств) – *произведение событий*. Это событие, состоящее в совместном осуществлении событий A и B.

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ (дополнение множества A до Ω) – *противоположное событие*. Это событие, состоящее в том, что A не происходит.

Для иллюстрации операций над событиями и обоснования свойств этих операций удобно использовать диаграммы Венна. На рис.1 заштрихованной фигурой показаны результаты $A+B$, AB и $\overline{A}$ (здесь множество Ω есть множество точек квадрата, события A и B – множество точек круга и прямоугольника).



а *б* *в*

Рис. 1

Ряд свойств операций над событиями аналогичен соответствующим свойствам алгебры чисел (невозможное V и достоверное U события играют как бы роль нуля и единицы):

1) $A+B=B+A$,

2) $A+V=A$,

3) $AB=BA$,

4) $AV=V$,

5) $AU=A$,

6) $A(B+C)=AB+AC$.

Однако некоторые свойства не имеют аналога в алгебре чисел, что позволяет говорить о своеобразной *алгебре событий*:

7) $A+U=U$,

8) $A + A = A$,

9) $A + B = A$, если $B \subset A$,

10) $AA = A$,

11) $AB = B$, если $B \subset A$,

12) $A + (BC) = (A + B)(A + C)$.

Еще более разительное отличие от обычной алгебры связано с операцией образования противоположного события, не имеющей аналога в действиях над числами:

13) $\overline{V} = U$,

14) $\overline{U} = V$,

15) $\overline{\overline{A}} = A$,

16) $A + \overline{A} = U$,

17) $A\overline{A} = V$,

18) $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$,

19) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

1.2. Классическое определение вероятности

Для количественного описания степени объективной возможности наступления случайного события вводится специальная числовая функция $P(A)$, называемая вероятностью события A.

Если испытание удовлетворяет тому условию, что соответствующее ему множество Ω представляет собой конечное множество равновозможных исходов (т. е. ни один не является более возможным, чем другой), то

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m – число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов); n – число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента).

Из *классического определения вероятности* (1.1) следует, что наибольшую вероятность имеет достоверное событие, $P(U) = 1$, а наименьшую – невозможное событие, $P(V) = 0$. Вероятность любого события A удовлетворяет неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

1.3. Формулы комбинаторики

При подсчете числа элементарных исходов, составляющих события в классической схеме, часто используются известные формулы комбинаторики.

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий, причем каждое можно выполнить n_i способами ($i = \overline{1,k}$). Все k действий вместе могут быть выполнены

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times .. \times n_k$$

способами (*основной принцип комбинаторики*).

Пусть Ω – множество из n элементов. Произвольное k-элементное подмножество (порядок элементов в подмножестве не существен) множества из n элементов называется *сочетанием из n элементов по k*. Число сочетаний из n элементов по k находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для чисел C_n^k справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойство симметрии);

$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, $C_n^0 = 1$ (рекуррентное соотношение);

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ (следствие биномиальной формулы Ньютона).

Различные *упорядоченные* множества (каждому элементу упорядоченного множества поставлено в соответствие некоторое число – номер элемента), которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества. Число перестановок множества, содержащего n элементов, определяется по формуле

$$P_n = n!$$

Упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются *размещениями* из n элементов по k (отличаются либо элементами, либо их порядком). Число упорядоченных k-элементных подмножеств множества из n элементов $A_n^k = k!C_n^k$ и находится по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – целые неотрицательные числа и $\sum_{i=1}^{m} k_i = n.$ Множество A из n элементов представим в виде суммы m множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов. Число различных способов такого разбиения на группы определяется по формуле

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Пусть n-элементное множество A является суммой множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, число элементов которых равно соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$; $B - m$-элементное подмножество множества A, содержащее m_1 элементов из A_1, m_2 элементов из $A_2, \ldots, m_k$ элементов из A_k $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m\right)$. Число способов, которыми можно выбрать такое множество B и A (множества неупорядоченные), в силу основного принципа комбинаторики равно

$$C_{n_1}^{m_1} \times C_{n_2}^{m_2} \times \ldots \times C_{n_k}^{m_k}.$$

1.4. Геометрическое и статистическое определение вероятности

Формула классической вероятности следующим образом обобщается на случай непрерывных множеств элементарных исходов Ω.

Пусть условия опыта таковы, что вероятность попадания случайной точки M в произвольную область ω, принадлежащую Ω, пропорциональна мере этой области и не зависит от ее местоположения в Ω. При этих условиях для вероятности осуществления события $A = \{M \in \omega\}$ справедлива формула *геометрической вероятности:*

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}(\omega)}{\mathrm{mes}(\Omega)}. \tag{1.2}$$

В формуле (1.2) $\mathrm{mes}(\omega)$ и $\mathrm{mes}(\Omega)$ – мера области ω и области Ω (длина, площадь и объем в одно- , дву- и трехмерном случаях соответственно).

При *статистическом определении* в качестве вероятности события принимают его относительную частоту или число, близкое к ней.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу проведенных испытаний. Относительная частота события, определяемая равенством

$$W(A) = \frac{m^*}{n^*},$$

m^* – число появлений события A; n^* – общее число проведенных испытаний, обладает свойством устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных испытаниях $W(A)$ изменяется мало (тем меньше, чем больше проведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Благодаря свойству устойчивости относительная частота может служить приближенной оценкой вероятности события, тем более точной, чем больше число проведенных испытаний.

1.5. Формулы сложения и умножения вероятностей

Пусть A и B – несовместные события, т. е. появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании, тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Эта формула обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1,$$

так как появление одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Для противоположных событий A и $\overline{A}$, образующих полную группу, имеем

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Обозначая $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$, получаем другую форму записи предыдущего равенства:

$$p+q=1.$$

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A/B)$, определяемое равенством

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)\neq 0.$$

Из этого определения вытекает формула умножения вероятностей для двух событий:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B),$$

обобщение которой для n событий имеет вид

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

События A и B называются *независимыми*, если выполняется соотношение

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Несколько событий называются *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы.

Несколько событий называют *независимыми в совокупности* (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, определяется по формуле

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Вероятность появления *хотя бы одного* из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n)$$

или $P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$.

В частном случае, если $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$,

то $P(A) = 1 - q^n$.

Пусть теперь A и B – совместные события, т. е. появление одного не исключает появление другого в одном и том же испытании. Тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для вероятности осуществления хотя бы одного из трех совместных событий A, B или C получаем

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Для n событий формула сложения записывается в виде

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i}\sum_{j}\limits_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k}\limits_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

1.6. Формула полной вероятности, формулы Байеса

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу. Тогда

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA$$

и по формулам сложения и умножения вероятностей получаем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Это равенство называют *формулой полной вероятности*.

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

1.7. Последовательность независимых испытаний

Пусть производятся несколько испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний. Такие испытания называют независимыми относительно события A.

Рассмотрим независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), определяется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (1.3)$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, находят соответственно по формулам:

$$P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1),$$

$$P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n),$$

$$P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n),$$

$$P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k).$$

При больших значениях n (порядка десятков, сотен) вместо формулы (1.3) применяют приближенные формулы. Вероятность $P_n(k)$ определяется по приближенной формуле (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x). \tag{1.4}$$

Здесь $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\;x^2/2}$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложениях настоящего учебного пособия. Для отрицательных значений x используется та же таблица, так как функция $\varphi(x)$ – четная, следовательно, $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, определяется по приближенной формуле

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1). \tag{1.5}$$

Здесь $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ – функция Лапласа, значения которой для положительных значений x ($0\le x\le 5$) даны в приложениях настоящего учебного пособия, для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Функция $\Phi(x)$ – нечетная, следовательно, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

При $n \to \infty$, $p \to 0$ используют приближенные формулы

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} \mathrm{e}^{-a}, \quad a = np, \tag{1.6}$$

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{a^k}{k!} \mathrm{e}^{-a}. \tag{1.7}$$

Формула (1.4) основана на локальной теореме Муавра–Лапласа, формула (1.5) – на интегральной теореме Муавра–Лапласа, формулы (1.6) и (1.7) – на формуле Пуассона. Асимптотику Пуассона рекомендуется применять в случае, когда $np < 10$. В противном случае более точные результаты дает асимптотика Муавра–Лапласа.

Рассмотрим теперь испытания, в которых вероятности появления события различны.

Пусть производится n независимых испытаний, причем в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором – $p_2, \ldots$, в n-м испытании – p_n, а вероятности непоявления события A соответственно равны $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Производящей функцией вероятностей $P_n(k)$ называют функцию, определяемую равенством

$$\varphi_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) \ldots (p_n z + q_n).$$

Вероятность $P_n(k)$ того, что в этих n независимых испытаниях событие A появится ровно k раз, равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции по степеням z.

2. Случайные величины

2.1. Законы распределения случайных величин

Случайной величиной X называется функция $X = X(\omega)$, заданная на множестве элементарных событий.

Это определение является точным в случае дискретного пространства Ω. В общем случае на функцию $X(\omega)$ накладывается требование измеримости.

Различают случайные величины *дискретного* и *непрерывного* типа.

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество ее возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$ конечно или счетно. Вероятность события $\{X = x_i\}$ обозначим $P\{X = x_i\} = p_i > 0,\ \sum\limits_i p_i = 1,$ где суммирование распространяется на все возможные значения i.

Закон распределения дискретной случайной величины, т. е. соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями, можно задать таблично (рядом распределения), графически (многоугольником распределения) или аналитически (в виде формулы).

Общим способом задания закона распределения случайных величин обоих типов является *функция распределения вероятностей* (*интегральная функция*).

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется функция $F(x)$ действительной переменной x, определяющая для каждого значения x вероятность того, что X примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P\{X < x\}, \quad -\infty < x < \infty .$$

Для дискретной случайной величины $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} P\{X = x_i\}$, где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$. Отсюда следует, что $F(x_i + 0) - F(x_i) = P\{X = x_i\},\ x_i \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, т. е. функция распределения дискретной случайной величины испытывает скачки в точках x, для которых существует положительная вероятность события $\{X = x\}$.

Случайная величина X называется *непрерывной* случайной величиной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства $F(x)$.

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Если $a < X < b$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

3. $F(x)$ – неубывающая функция на всей оси.

4. $F(x)$ непрерывна слева, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$.

Вероятность попадания случайной величины X на произвольный полуинтервал $[a,b)$ действительной оси определяется формулой

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a).$$

Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать, используя *плотность распределения вероятностей* (*дифференциальную функцию*) $f(x)$, такую, что $F(x) = P\{X < x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$.

Свойства $f(x)$.

1. $f(x) \ge 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Если $a < X < b$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

3. $f(x) = F'(x)$ в точках непрерывности $f(x)$.

Для непрерывной случайной величины

$P\{X = x\} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \left(F(x+\Delta x) - F(x)\right) = 0$ при всех $x \in R$.

Отсюда получаем, что

$$P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\}.$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на интервал может быть вычислена как через $F(x)$, так и через $f(x)$:

$$P\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

2.2. Числовые характеристики случайных величин

Среди числовых характеристик, которыми помимо законов распределения могут также описываться случайные величины, различают *характеристики положения* $\left(M(X), M_0(X), M_e(X)\right)$ и *характеристики рассеяния* ($D(X), \sigma(X)$, различные моменты распределения порядка выше первого).

Математическим ожиданием (средним значением по распределению) называется действительное число, определяемое формулой для случайной величины X:

а) дискретного типа $M(X) = \sum_i x_i p_i$; (2.1)

б) непрерывного типа $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$. (2.2)

$M(X)$ существует, если соответственно ряд или интеграл в правой части равенства (2.1) или (2.2) сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания.

1. $M(C) = C$, где C – const.

2. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

3. $M(XY) = M(X)M(Y)$, если X и Y – независимые случайные величины.

4. $M(CX) = CM(X)$.

Модой случайной величины называется действительное число $M_0(X)$, определяемое для случайной величины X:

а) непрерывного типа, как точка максимума плотности распределения $f(x)$;

б) дискретного типа, как наиболее вероятное значение в случае, если оно единственно. $M_0(X)$ может не существовать, иметь единственное значение (унимодальное распределение) или множество значений (мультимодальное распределение).

Медианой случайной величины X непрерывного типа называется действительное число $M_e(X)$, удовлетворяющее условию

$$P\{X < M_e(X)\} = P\{X \geq M_e(X)\} \text{ или } F(x) = \frac{1}{2}.$$

Так как последнее уравнение может иметь множество корней, то $M_e(X)$ определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Дисперсией случайной величины X называется неотрицательное число

$$D(X) = M[X - M(X)]^2,$$

т. е. математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее $M(X)$. $D(X)$ определяется по формуле для случайной величины X:

а) дискретного типа $D(X) = \sum\limits_i \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i$, (2.3)

б) непрерывного типа $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x$. (2.4)

$D(X)$ существует, если соответственно ряд или интеграл в правой части равенства (2.3) или (2.4) сходится.

Для вычисления $D(X)$ часто бывает удобно использовать вместо равенств (2.3) и (2.4) соответственно формулы

$$D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - [M(X)]^2, \quad D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии.

1. $D(C)=0$, где C – const.

2. $D(CX)=C^2 D(X)$.

3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, если X и Y – независимые случайные величины. В частности, $D(X+C)=D(X)$.

4. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Среднеквадратичным отклонением случайной величины X называется неотрицательное число

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)},$$

которое имеет размерность случайной величины X и определяет некоторый стандартный среднеквадратичный интервал рассеивания, симметричный относительно $M(X)$.

Начальным моментом k *-го порядка* ($k=0, 1, 2, \ldots$) распределения случайной величины X (если он существует) называется действительное число $\nu_k = M(X^k)$, определяемое по формуле для случайной величины:

а) дискретного типа $\nu_k = \sum\limits_i x_i^k p_i$; (2.5)

б) непрерывного типа $\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$. (2.6)

Центральным моментом k *-го порядка* распределения случайной величины X (если он существует) называется число $\mu_k = M\left[(X-M(X))^k\right]$, определяемое по формуле для случайной величины:

а) дискретного типа $\mu_k = \sum\limits_i \left[x_i - M(X)\right]^k p_i$; (2.7)

б) непрерывного типа $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-M(X))^k f(x)\mathrm{d}x$. (2.8)

Из определения моментов, в частности, следует, что $\nu_0=\mu_0=1$, $M(X)=\nu_1$, $D(X)=\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$.

Отметим еще две важные характеристики распределения, связанные с моментами высшего порядка:

$A_S = \dfrac{\mu_3}{[\sigma(X)]^3}$ – коэффициент асимметрии, или «скошенности», распределения,

$E_k = \dfrac{\mu_4}{[\sigma(X)]^4} - 3$ – коэффициент эксцесса или «островершинности», распределения.

Заметим, что если множество возможных значений дискретной случайной величины конечно (равно n), а все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то во всех вышеприведенных формулах будем иметь соответственно суммирование от $i=1$ до n (например, $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$), а вместо несобственных интегралов – определенные интегралы (например, $M(X) = \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$).

2.3. Некоторые виды распределений

Примеры дискретных распределений

1. *Биномиальное распределение (распределение Бернулли)*

$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $0 < p < 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Его основные характеристики: $M(X) = npq$, $D(X) = npq$,

$A_S = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$, $E_k = \dfrac{1-6pq}{npq}$.

2. *Распределение Пуассона*

$P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$, $\lambda = np$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Характерная особенность этого распределения:

$$M(X) = D(X) = \lambda\,.$$

Распределение Пуассона может быть получено из биномиального распределения путем предельного перехода при $n \to \infty$, $p \to 0$ при условии $\lambda = np = \text{const}$ и в этом случае интерпретируется как закон «редких» явлений.

3. *Геометрическое распределение*

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1},\ 0 < p < 1,\ \ k = 1, 2, 3, \ldots, n\,.$$

Здесь дискретная случайная величина X – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A, вероятность появления которого в каждом независимом испытании равна p.

4. *Гипергеометрическое распределение*

$$P\{X = k\} = C_M^k C_{N-M}^{n-k} \big/ C_N^n\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \min(M, n)\,.$$

Здесь событие $\{X = k\}$ состоит в том, что среди n случайно отобранных изделий ровно k «стандартных». Случайный отбор производится из партии, содержащей N изделий, среди которых имеется M «стандартных» ($M < N$).

Примеры непрерывных распределений

1. *Равномерное распределение*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \quad -\infty < a < b < +\infty. \end{cases}$$

Для этого распределения $M(X) = \dfrac{(a+b)}{2},\ D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

2. *Нормальное распределение*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)},\ \ -\infty < m < \infty,\ \ \sigma > 0\,.$$

Параметры m и σ совпадают с основными характеристиками распределения: $m = M(X)$, $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Кроме того, $M_0(X) =$

$= M_e(X) = m$ и $A_s = E_k = 0$. При $m = 0$ и $\sigma = 1$ нормальное распределение называют *нормированным* ($f(x) = \varphi(x)$, см. п. 1.7).

Функция $F(x)$ нормального распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}t = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + 0{,}5,$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (см. п. 1.7).

С помощью функции Лапласа вычисляются вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (a, b):

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

а также вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа ε:

$$P\{|X - m| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Преобразуя последнюю формулу, получим:

$$P\{|X - m| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0{,}9973,$$

т. е. если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит 3σ (правило трех сигм).

3. *Показательное распределение*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина. Основные характеристики распределения: $M(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda^2$, $\sigma(X) = 1/\lambda$.

Функция распределения показательного закона имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по показательному закону, примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), определяется по формуле

$$P\{a < X < b\} = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}.$$

2.4. Законы распределения двумерной случайной величины

Двумерной называют случайную величину $Z = (X,Y)$, возможные значения которой есть пары чисел (x,y); ее составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин.

Двумерную случайную величину можно истолковать как случайную точку $M(X,Y)$ или как случайный вектор $\overline{OM}$ на плоскости Oxy.

В зависимости от типа составляющих различают двумерные случайные величины *дискретного* и *непрерывного* типа.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины может быть задан в виде табл. 1 с двойным входом, содержащей возможные значения (x_i, y_j) и их вероятности $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Итоговые строка или столбец табл. 1 задают соответственно распределения составляющих X или Y:

$$P\{X = x_i\} = p_{i*} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$P\{Y = y_j\} = p_{*j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Таблица 1

$Y \backslash X$	$x_1 \dots \quad x_i \dots \quad x_n$	$\sum$
y_1 $\vdots$ y_j $\vdots$ y_m	$p_{11} \cdots \quad p_{i1} \cdots \quad p_{n1}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $p_{1j} \cdots \quad p_{ij} \cdots \quad p_{nj}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $p_{1m} \cdots \quad p_{im} \cdots \quad p_{nm}$	p_{*1} $\vdots$ p_{*j} $\vdots$ p_{*m}
$\sum$	$p_{1*} \cdots \quad p_{i*} \cdots \quad p_{n*}$	1

Общим способом описания закона распределения двумерных случайных величин обоих типов является *функция распределения вероятностей двумерной случайной величины* (*интегральная функция*) $F(x, y)$:

$$F(x, y) = P\{X < x,\ Y < y\},\ -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty,$$

т. е. $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрат с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.

Свойства $F(x, y)$.

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0,\ \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1.$

3. $\lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y) = F_1(x),\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = F_2(y)$.

4. $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому аргументу.

5. $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому из аргументов.

Свойство 3 означает, что функции распределения составляющих X и Y могут быть найдены предельным переходом из $F(x, y)$.

Используя $F(x,y)$, можно найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $x_1 < X < x_2$, $y_1 < Y < y_2$:

$$P\{x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2\} = [F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)] - \\ - [F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)].$$

Непрерывную двумерную случайную величину можно также задать используя *плотность совместного распределения вероятностей* (*двумерную плотность вероятности, дифференциальную функцию системы*) $f(x,y)$, такую, что $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Свойства $f(x,y)$.

1. $f(x,y) \geq 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$. Если все возможные значения $Z = (X,Y)$ принадлежат конечной области G, то $\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

3. Если (x,y) – точка непрерывности $f(x,y)$, то

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Плотности распределения составляющих X и Y (*маргинальные* плотности) выражаются в виде интегралов от совместной плотности, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в произвольную область G определяется равенством

$$P\{(X,Y) \subset G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2.5. Условные законы распределения вероятностей составляющих двумерной случайной величины

Условным распределением дискретной составляющей X при $Y = y_j$ (j сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях X) называется совокупность условных вероятностей

$$p(x_1/y_j), p(x_2/y_j), \ldots, p(x_n/y_j).$$

Аналогично определяется условное распределение Y .

Условные вероятности дискретных составляющих X и Y вычисляются соответственно по формулам

$$p(x_i/y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*j}} \text{ и } p(y_j/x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i*}}.$$

Условная плотность распределения вероятностей непрерывной составляющей X при заданном значении $Y = y$ равна отношению $f(x,y)$ к $f_2(y)$, т. е.

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \text{ при } f_2(y) \neq 0.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения вероятностей непрерывной составляющей Y :

$$\psi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \text{ при } f_1(x) \neq 0.$$

Если $\psi(y/x) = f_2(y)$ или $\varphi(x/y) = f_1(x)$, то случайные величины X и Y называются *независимыми*.

Необходимое и достаточное условие независимости X и Y :

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y).$$

В частности, в случае непрерывных случайных величин X и Y это условие можно записать в виде

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y).$$

2.6. Числовые характеристики двумерной случайной величины

Математическое ожидание и дисперсия составляющих двумерной случайной величины определяются по безусловным распределениям так же, как и для одномерной случайной величины, и называются *безусловными*. При этом соответствующие формулы могут строиться на базе распределений составляющих или на базе исходного двумерного распределения (табл. 2).

Таблица 2

Характеристика	Дискретные случайные величины	Непрерывные случайные величины
$M(X)=\overline{X}$	$\sum\limits_i x_i p_{i*}=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$M(Y)=\overline{Y}$	$\sum\limits_j y_j p_{*j}=\sum\limits_j\sum\limits_i y_j p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$D(X)=M(X-\overline{X})^2$	$\sum\limits_i (x_i-\overline{X})^2 p_{i*} = \sum\limits_i\sum\limits_j (x_i-\overline{X})^2 p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^2 f_1(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$D(Y)=M(Y-\overline{Y})^2$	$\sum\limits_j (y_j-\overline{Y})^2 p_{*j} = \sum\limits_j\sum\limits_i (y_j-\overline{Y})^2 p_{ij}$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-\overline{Y})^2 f_2(y)\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-\overline{Y})^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Свойства этих характеристик и техника их вычисления не отличаются от свойств и способов расчета характеристик одномерной случайной величины. Продолжив эту аналогию, можно ввести характеристики условных распределений – условные математическое ожидание и дисперсию.

Для анализа зависимости между двумя случайными величинами X и Y вводится еще одна характеристика μ_{xy} – *смешанный момент второго порядка* (*корреляционный момент* или *ковариация*):

$$\mu_{xy} = M\left[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})\right].$$

Для случайной величины $Z = (X, Y)$:

а) дискретного типа $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - \overline{X})(y_j - \overline{Y})p_{ij}$; (2.9)

б) непрерывного типа $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \overline{X})(y - \overline{Y})f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (2.10)

Так как $\mu_{xy} = M[XY] - \overline{X}\,\overline{Y}$, то для его вычисления часто бывает удобно использовать вместо формул (2.9) и (2.10) соответственно формулы:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij} - \overline{X}\,\overline{Y},$$

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy f(x, y)dxdy - \overline{X}\,\overline{Y}.$$

Безразмерная величина $r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ называется *коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y и служит для оценки тесноты линейной связи между ними.

Свойства r_{xy}.

1. $\left|r_{xy}\right| \le 1$.

2. Если X и Y связаны линейной зависимостью, то $|r_{xy}| = 1$.

3. Если X и Y – независимые случайные величины, то $r_{xy} = 0$.

Обратное неверно: из условия $r_{xy} = 0$ (некоррелированность случайных величин X и Y) не следует независимость X и Y.

2.7. Законы распределения функции одного случайного аргумента

Пусть две случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X),$$

где φ – неслучайная функция.

Если X – случайная величина дискретного типа, то Y – также дискретного типа, причем ее возможные значения $y_k = \varphi(x_k)$. При этом, если $\varphi(X)$ строго монотонна, то

$$P\{Y = y_k\} = P\{X = x_k\}.$$

Если же среди y_k имеются одинаковые значения, то

$$P\{Y = y_k\} = \sum_{i:\varphi(x_i)=y_k} P\{X = x_i\},$$

т. е. необходимо сложить вероятности тех значений x_i, для которых $\varphi(x_i) = y_k$.

Если X – непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y = \varphi(x)$ – дифференцируемая строго монотонная функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находят из равенства

$$g(y) = f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|.$$

Если же функция $y = \varphi(x)$ в интервале возможных значений X не монотонна, то этот интервал разбивается на такие интервалы, где

$y = \varphi(x)$ монотонна, и находятся плотности распределений $g_i(y)$ для каждого из интервалов монотонности. В этом случае

$$g(y) = \sum_i g_i(y).$$

2.8. Числовые характеристики функций случайных величин

Если для случайной величины $Y = \varphi(X)$ найден ее закон распределения, то определение и техника вычисления ее числовых характеристик такие же, как и для случайного аргумента X (см. п. 2.2).

Иногда нет необходимости находить закон распределения $Y = \varphi(X)$. Числовые характеристики могут выражаться через закон распределения случайного аргумента *X*. Для случайной величины *Y*:

а) дискретного типа:

$$M(Y) = \sum_k \varphi(x_k) P\{X = x_k\},$$

$$D(Y) = \sum_k [\varphi(x_k) - M(Y)]^2 P\{X = x_k\};$$

б) непрерывного типа:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - M(Y))^2 f(x) \mathrm{d}x.$$

Аналогичные формулы имеют место и для всех прочих начальных и центральных моментов распределения случайной величины *Y*, которая является неслучайной функцией от *X*.

2.9. Закон больших чисел

Под законом больших чисел понимают ряд утверждений и теорем, объединенных идеей устойчивости средних результатов при большом числе испытаний.

Для случайной величины X справедливо *неравенство Чебышева:*

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(x)}{\varepsilon^2},$$

вторая форма записи которого имеет вид

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ имеет конечные математические ожидания и дисперсии этих величин равномерно ограничены $(D(X_i) \leq C - \text{const})$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

т. е. среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

В частности, если $M(X_i) = m,\ i = \overline{1,n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Бернулли. Если в любом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Центральная предельная теорема. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $M(X_i) = m$ и $D(X_i) = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$. Тогда при $n \to \infty$ функция распределения нормированной суммы $Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sigma\sqrt{n}}$ сходится к функции распределения нормальной случайной величины с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$.

Расчетные задания

Вариант 1

1. В урне имеется четыре белых и пять черных шаров. Из урны наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что среди этих шаров один белый и два черных.

2. Среди 10 лотерейных билетов 5 выигрышных. Наудачу взяли 3 билета. Определить вероятность того, что среди них не более 2 выигрышных.

3. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены 3 точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь треугольника.

4. В двух партиях 90 и 95% доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбираются по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) два бракованных; б) хотя бы одно бракованное; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

5. В альбоме 8 чистых и 10 гашеных марок. Из него наудачу извлекаются 5 марок, подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекаются 2 марки. Определить вероятность того, что обе марки чистые.

6. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго – 30 %, с третьего – 30 % деталей. Среди деталей первого автомата 2 % бракованных, второго – 1 %, третьего – 0,5 %. Найти вероятность того, что деталь, оказавшаяся бракованной, изготавливалась на третьем автомате.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений шести очков было равно 10?

8. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,04. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если известно число выстрелов $n = 100$.

9. Найти вероятность того, что число мальчиков среди 600 новорожденных больше 300, но меньше 350. Вероятность рождения мальчика 0,515.

10. Стрелок производит по мишени шесть выстрелов. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле 0,5. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 2X - 4Y$.

$X = x_i$	-1	3	4
$P(X=x_i)=p_i$	0,2	p_2	0,6

$Y = y_k$	2	3
$P(Y = y_k) = p_k$	0,4	0,6

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{при } x \in [0; \pi/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \pi/2], \end{cases} \quad x_1 = 0, \ x_2 = \pi/4.$$

13. Среднее время работы каждой из двух радиоламп соответственно равно 900 и 800 ч. Определить вероятность того, что обе лампы будут работать не менее 850 ч.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(1,1)$; $C(1,-1)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 2

1. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что выпадут 2 «герба».

2. Из 20 вопросов, входящих в экзаменационный билет, студент подготовил 17. Найти вероятность того, что студент ответил правильно на экзаменационный билет, состоящий из двух вопросов.

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутрь круга наудачу брошены 3 точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь одного из малых сегментов.

4. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,9 для первого сигнализатора и 0,8 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только один сигнализатор; б) хотя бы один сигнализатор.

5. В одной урне четыре белых и пять черных шаров; во второй урне три белых и четыре черных. Из первой урны во вторую переложили три шара, затем из второй урны извлечен один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй урны шар белый.

6. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,7, для второго 0,5. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал второй стрелок.

7. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 20 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

8. Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты 0,003. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на трех веретенах.

9. Найти вероятность того, что в партии из 100 изделий число изделий высшего сорта заключено между 80 и 90, если вероятность того, что изделие высшего сорта, равна 0,8.

10. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность

попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем она уменьшается на 0,1. Составить закон распределения числа патронов, израсходованных охотником. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 2X - Y$.

$X = x_i$	2	7	9
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	0,3	0,2

$Y = y_k$	–1	1
$P(Y = y_k) = p_k$	0,7	0,3

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x & \text{при } x \in [0; \pi/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \pi/2], \end{cases} \quad x_1 = -3\pi/2, \; x_2 = \pi/4.$$

13. Время безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием 100 ч. Определить вероятность безотказной работы двигателя за 80 ч.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-1,1)$; $C(1,1)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} (x-3)/2, & x \in [3,5] \\ 0, & x \notin [3,5] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 3

1. Из колоды, содержащей 52 карты, вынимается наугад три. Найти вероятность, что это тройка, семерка и туз.

2. Брошены две игральные кости. Какова вероятность выпадения на двух костях в сумме не менее восьми очков? Какова вероятность выпадения одного очка, по крайней мере, на одной кости?

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутрь круга наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попало по одной точке.

4. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком 0,6, вторым 0,7. Первый сделал пять выстрелов, второй – шесть выстрелов. Определить вероятность того, что: а) цель не поражена; б) цель поражена.

5. В первой урне два белых и три черных шара, во второй пять белых и четыре черных шара. Из первой урны во вторую переложили два шара, затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй урны шар черный.

6. Счетчик регистрирует частицы трех типов: A, B и C. Вероятность появления этих частиц $P(A) = 0{,}2, P(B) = 0{,}5, P(C) = 0{,}3.$ Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями p =0,8, p =0,2, p =0,4. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была частица типа A.

7. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,2 – мелкий и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 15 билетов. Определить вероятность получения двух крупных и двух мелких выигрышей.

8. Производство дает 1 % брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет не больше 17?

9. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8.

10. Бросают четыре монеты. Случайная величина X – количество выпавших гербов. Построить ряд распределения и функцию распределения этой случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z=X+Y$ и $V=XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W=X-3Y$.

$X=x_i$	-2	4
$P(X=x_i)=p_i$	0,4	0,6

$Y=y_k$	0	5	10
$P(Y=y_k)=p_k$	0,3	p_2	0,3

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{при } x\in[0;\pi/2], \\ 0 & \text{при } x\notin[0;\pi/2], \end{cases} \quad x_1=0{,}5,\ x_2=1{,}5.$$

13. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $f(t)=0{,}002e^{-0{,}002t}, (t>0)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает 1000 ч.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-1,1)$; $C(-1,-1)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases} (x-2)/2, & x\in[2,4] \\ 0, & x\notin[2,4] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 4

1. Ребенок играет с буквами разрезной азбуки: А, А, М, М. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово МАМА?

2. В группе из 15 человек 6 человек занимаются спортом. Найти вероятность того, что из случайно отобранных 7 человек 5 человек занимаются спортом.

3. Вокруг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены 3 точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попадет по одной точке.

4. В ящике 6 красных и 10 синих пуговиц. Вынимаются наудачу 2 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

5. В альбоме 12 чистых и 5 гашеных марок. Из них наудачу извлекают три марки. Они подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекают две марки. Определить вероятность того, что обе марки чистые.

6. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна: для первого завода – 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,8 и для четвертого – 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

7. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из 10 посеянных взойдут не менее четырёх?

8. Монета подброшена 40 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет 12 раз.

9. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в результате 500 выстрелов промахов окажется от 410 до 430.

10. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X – сумма номеров шаров. Построить ряд и функцию распределения случайной величины X.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 2Y - X$.

$X=x_i$	4	6	9
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,5	p_3

$Y=y_k$	3	5
$P(Y=y_k)=p_k$	0,4	0,6

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{при } x \in [1;\,2], \\ 0 & \text{при } x \notin [1;\,2], \end{cases} \quad x_1 = 0{,}5 \;\; x_2 = 1{,}5.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\mathrm{e}^{-3x^2+3x-2}$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$.

14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-1,-1)$; $C(1,-1)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} (x-1)/2, & x \in [1,3] \\ 0, & x \notin [1,3] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 5

1. В урне имеется три белых и пять черных шаров. Из урны наугад выбираются два шара. Найти вероятность того, что среди этих шаров один белый и один черный.

2. Найти вероятность того, что абонент наберет правильный двузначный номер, если он знает, что данный номер не делится на 5.

3. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены две точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь треугольника.

4. В двух партиях 80 и 90 % доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбираются по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) два бракованных; б) хотя бы одно бракованное; в) одно бракованное и одно доброкачественное?

5. Программа экзамена состоит из 30 вопросов. Из 20 студентов группы 8 человек выучили все вопросы, 6 человек – по 25 вопросов, 5 человек – по 20 вопросов, а один человек – 10 вопросов. Определить вероятность того, что случайно вызванный студент ответит на два вопроса билета.

6. Имеется три урны. В первой три белых и два черных шара, во второй и третьей по четыре белых и три черных шара. Из случайно выбранной урны извлекается шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?

7. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1?

8. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,03. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если известно, что число выстрелов $n = 120$.

9. Найти вероятность того, что число мальчиков среди 400 новорожденных больше 200, но меньше 250. Вероятность рождения мальчика 0,515.

10. Найти закон распределения случайной величины X – числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответ-

ственно 0,5, 0,6, 0,7. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 4X - 2Y$.

$X=x_i$	1	2	5
$P(X=x_i)=p_i$	p_1	0,1	0,7

$Y=y_k$	1	3
$P(Y=y_k)=p_k$	0,25	0,75

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)(x-4) & \text{при } x \in [2;4], \\ 0 & \text{при } x \notin [2;4], \end{cases} \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

13. Среднее время работы каждой из двух радиоламп соответственно равно 850 и 750 ч. Определить вероятность того, что обе лампы будут работать не менее 600 ч.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(2,2)$; $C(2,-2)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 6

1. Игральная кость подброшена два раза, найти вероятность того, что: а) сумма очков на верхних гранях составит 7; б) хотя бы два очка появится при одном подбрасывании.

2. На отдельных карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все карточки перемешиваются, после чего наугад берут 5 карточек и раскладывают их в ряд. Определить вероятность того, что будет получено число 12035.

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутри круга наудачу брошены две точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь одного из малых сегментов.

4. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,8 для первого сигнализатора и 0,75 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только один сигнализатор; б) хотя бы один сигнализатор.

5. В магазине продается четыре магнитофона. Вероятности того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно равны: 0,91; 0,9; 0,95; 0,94. Найти вероятность того, что взятый наудачу магнитофон выдержит гарантийный срок.

6. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй – 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

7. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,4. Куплено 11 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

8. Прядильщица обслуживает 900 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты 0,002. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на четырех веретенах.

9. Найти вероятность того, что в партии из 100 изделий число изделий высшего сорта заключено между 85 и 95, если вероятность того, что изделие высшего сорта, равна 0,8.

10. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,8, а вероятность того, что второй, – 0,6. Случайная величина X – число покупок, сделанных покупателями. Составить закон распределения случайной величины X. Построить график функции распределения.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 3X - 2Y$.

$X=x_i$	-2	1
$P(X=x_i)=p_i$	0,2	0,8

$Y=y_k$	-1	2	4
$P(Y=y_k)=p_k$	0,3	p_2	0,4

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x & \text{при } x \in [\pi/4; \pi/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [\pi/4; \pi/2], \end{cases} \qquad x_1 = 0, \; x_2 = \pi/2.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\mathrm{e}^{-2x^2-8x+1}$, $x_1 = -3/2$, $x_2 = -1$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-2,2)$; $C(2,2)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}2(x-3), & x\in[3,4]\\ 0, & x\notin[3,4]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 7

1. На каждой из пяти одинаковых карточек написана одна из следующих букв: А, Е, Н, С, Т. Карточки перемешаны. Определить вероятность того, что: а) из вынутых и положенных в ряд карточек можно составить слово «СТЕНА»; б) из трех карточек можно составить слово «НЕТ».

2. В магазине имеются в продаже 20 пар обуви, из которых 7 пар 42-го размера. Найти вероятность того, что из 8 покупателей 3 выберут обувь 42-го размера.

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутрь круга наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь одного из малых сегментов.

4. Произведено три выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,75; при втором – 0,8; при третьем – 0,9. Определить вероятность того, что будет: а) три попадания; б) хотя бы одно попадание.

5. Пассажир за получением билета может обратиться в одну из касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, вторую – 0,35 и третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй – 0,4, для третьей – 0,6. Найти вероятность того, что пассажир купит билет.

6. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 10 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 25 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 8 стандартных. Из случайно выбранного ящика наудачу взята одна деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она взята из второго ящика.

7. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: а) выиграть два партии из четырех или три партии из шести?; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из шести? (Ничьи в расчет не принимаются).

8. У страховой компании 10 000 клиентов. Каждый из них, страхуясь от несчастного случая, вносит 500 руб. Вероятность несчастного случая 0,0055, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшему, составляет 50 000 руб. Какова вероятность того, что страховая компания потерпит убыток?

9. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70 % студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполнят: а) 150 студентов; б) не менее 100 студентов; в) не более 150 студентов?

10. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = Y - 4X$.

$X=x_i$	1	3	7
$P(X=x_i)=p_i$	0,2	0,5	p_3

$Y=y_k$	–2	1
$P(Y= y_k)=p_k$	0,35	0,65

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)(x-2) & \text{при } x \in [1;2], \\ 0 & \text{при } x \notin [1;2], \end{cases} \quad x_1 = 0, \; x_2 = 1{,}5.$$

13. Время безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием 120 ч. Определить вероятность безотказной работы двигателя за 100 ч.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-2,2)$; $C(-2,-2)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-2)/2, & x\in[2,4]\\ 0, & x\notin[2,4]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 8

1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность выпадения на двух костях в сумме не менее семи очков? Какова вероятность выпадения двух очков, по крайней мере, на одной кости?

2. В группе из 25 человек 10 учатся на «отлично», 8 – на «хорошо» и 7 – на «удовлетворительно». Найти вероятность того, что из взятых наугад 8 человек 3 человека учатся на «отлично».

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутрь круга наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попало по одной точке.

4. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком 0,8, вторым 0,75. Первый сделал шесть выстрелов, второй – пять выстрелов. Определить вероятность того, что: а) цель не поражена; б) цель поражена.

5. В первой урне два белых и девять черных шаров, во второй – три белых и три черных. Из первой урны во вторую переложили четыре шара, затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй урны шар черный.

6. Счетчик регистрирует частицы трех типов: A, B и C. Вероятность появления этих частиц $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}3$. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями $p = 0{,}4$, $p = 0{,}5$, $p = 0{,}6$. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была частица типа B.

7. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,13 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,17 – мелкий и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 15 билетов. Определить вероятность получения 1 крупного и 2 мелких выигрышей.

8. Производство дает 2 % брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1000 изделий выбраковано будет не больше 15?

9. Было посажено 500 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 300, если вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,7.

10. Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекратит задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 2/3. Составить закон распределения случайной величины X – числа заданных студенту вопросов. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = X - 2Y$.

$X=x_i$	-2	0	3
$P(X=x_i)=p_i$	p_1	0,1	0,5

$Y=y_k$	4	6
$P(Y=y_k)=p_k$	0,45	0,55

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{при } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{при } x \notin [1, 2], \end{cases} \quad x_1 = 0, \; x_2 = 1{,}5.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2 : f(x) = a\mathrm{e}^{-3x^2-4x+2}$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 4/3$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-2,-2)$; $C(2,-2)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} 2(x-3), & x \in [3, 4] \\ 0, & x \notin [3, 4] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 9

1. Ребенок играет с буквами разрезной азбуки: А, В, Д. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово ДВА?

2. Среди 15 лампочек 4 стандартных. Одновременно берут наудачу две лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.

3. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попадет по одной точке.

4. В ящике 7 красных и 10 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

5. В группе спортсменов 10 лыжников, 6 боксеров и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжников составляет

0,8, боксеров – 0,7, бегунов – 0,9. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

6. Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором 0,6 и в третьем 0,8. Определить вероятность того, что: а) покупатель купит товар в каком-то магазине; б) покупатель купил товар во втором магазине.

7. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью 0,75. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее двух?

8. Монета подброшена 64 раза. Найти вероятность того, что «герб» выпадет 30 раз.

9. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,2. Найти вероятность того, что в результате 600 выстрелов промахов окажется от 450 до 500.

10. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 3X - 2Y$.

$X=x_i$	-1	1	3
$P(X=x_i)=p_i$	0,15	0,1	p_3

$Y=y_k$	6	7
$P(Y=y_k)=p_k$	0,2	0,8

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{(x-1)^2}{25} & \text{при } 1 < x < 6, \\ 1 & \text{при } x \ge 6. \end{cases} \quad x_1 = 2,\ x_2 = 4.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\mathrm{e}^{-3x^2+4x-2}$, $x_1 = -1/3$, $x_2 = 5/3$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(1,1)$; $B(1,0)$; $C(0,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} (x-3)/2, & x \in [3,5] \\ 0, & x \notin [3,5] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 10

1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность выпадения на двух костях в сумме 10 очков? Какова вероятность выпадения 6 очков, по крайней мере, на одной кости?

2. Контролер ОТК, проверив качество сшитых 20 пальто, установил, что 16 из них первого сорта, а остальные – второго. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу из этой партии трех пальто одно будет второго сорта.

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутрь круга наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попало по одной точке.

4. В двух группах обучается по 25 студентов. В первой группе сессию на «отлично» сдали 7 человек, во второй – 4 человека. Из каждой группы наудачу вызывают по одному студенту. Какова веро-

ятность того, что: а) оба студента отличники; б) только один отличник; в) хотя бы один отличник?

5. В первой урне три белых и семь черных шаров, во второй – пять белых и два черных. Из первой урны во вторую переложили три шара, затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй урны шар черный.

6. Мышь может выбрать наугад один из пяти лабиринтов. Известно, что вероятности ее выхода из различных лабиринтов за три минуты равны 0,5; 0,6; 0,2; 0,1; 0,1. Пусть оказалось, что мышь вырвалась из лабиринта через три минуты. Какова вероятность того, что она выбрала: а) первый лабиринт; б) второй лабиринт?

7. В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными между собой, определить вероятность того, что в данной семье: а) не менее трех мальчиков; б) не более трех мальчиков.

8. Производство дает 3 % брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 900 изделий выбраковано будет не больше 10?

9. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Было произведено 600 выстрелов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9948 будет заключаться число попаданий в цель.

10. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано 3 выстрела. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = Y - 5X$.

$X=x_i$	1	4
$P(X=x_i)=p_i$	0,32	0,68

$Y=y_k$	2	3	5
$P(Y=y_k)=p_k$	0,2	p_2	0,4

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x)=\begin{cases} a(x+1)(x-2) & \text{при } x\in[-1;2], \\ 0 & \text{при } x\notin[-1;2], \end{cases} \quad x_1=0,\ x_2=1.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x)=a\,\mathrm{e}^{-2x^2+8x}$, $x_1=1$, $x_2=3$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,1)$; $B(1,1)$; $C(0,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases} (x-3)/2, & x\in[3,5] \\ 0, & x\notin[3,5] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 11

1. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найти вероятности: а) выпадения 11 очков; б) выигрыша.

2. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность, что оба арбуза спелые?

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутрь круга наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попало по одной точке.

4. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком 0,72, вторым 0,44. Первый стрелок сделал два выстрела, второй – три. Определить вероятность того, что: а) цель не поражена; б) цель поражена.

5. В первом ящике из шести шаров четыре красных и два черных, во втором ящике из семи шаров два красных и пять черных. Из первого ящика во второй переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первого ящика, – черный.

6. Перед посевом 95 % семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки – 99 %, необработанных – 85 %. Случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

7. Предполагается, что 10 % открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?

8. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что: а) тираж содержит 5 бракованных книг; б) по крайней мере, 9998 книг сброшюрованы правильно.

9. Было посажено 800 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 650, если вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,85.

10. В среднем по 10 % договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = X - 2Y$.

$X=x_i$	1	7	9
$P(X=x_i)=p_i$	0,2	0,4	p_3

$Y=y_k$	3	5
$P(Y=y_k)=p_k$	0,32	0,68

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 - 2x) & \text{при } x \in [0;\, 2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\, 2], \end{cases} \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1{,}5.$$

13. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35; 40)?

14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-1{,}1)$; $B(-1{,}0)$; $C(0{,}0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \notin [1{,}2] \\ 0, & x \notin [1{,}2] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 12

1. Ребенок играет с буквами разрезной азбуки: З, Е, Н, П, А. Какова вероятность того, что при случайном разложении букв в ряд он получит слово ПЕНЗА ?

2. У сборщика имеются 10 деталей, мало отличающихся друг от друга, из них четыре – первого, по две – второго, третьего и четвертого видов. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся первого вида, два – второго и одна – третьего?

3. В круг радиуса 5 вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены 3 точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попадет по одной точке.

4. В ящике четыре красных и шесть синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

5. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные, а в двух других – все доброкачественные?

6. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55 % изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска нестандартного изделия первым предприятием равна 0,1, вторым – 0,15. Определить вероятность того, что: а) взятое наудачу изделие окажется нестандартным; б) взятое изделие выпущено на втором предприятии при условии, что это изделие оказалось нестандартным.

7. Всхожесть семян огурцов равна 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?

8. Монета подброшена 100 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет 55 раз.

9. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что в результате 500 выстрелов промахов окажется от 300 до 350.

10. В магазин привезли арбузы из Ташкента и Камышина в равных количествах. Вероятность покупки неспелого арбуза равна соответственно 0,1 и 0,3. Куплено четыре арбуза. Составить закон распределения спелых арбузов среди купленных. Построить график функции распределения данной случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 4X - 2Y$.

$X=x_i$	–3	3	6
$P(X=x_i)=p_i$	0,21	p_2	0,57

$Y=y_k$	1	5
$P(Y=y_k)=p_k$	0,44	0,56

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2, \\ \dfrac{(x+2)^2}{25} & \text{при } -2 < x < 3, \\ 1 & \text{при } x \ge 3. \end{cases} \quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\mathrm{e}^{-4x^2+6x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3/4$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-1,-1)$; $B(0,-1)$; $C(0,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 13

1. Ребенок играет с буквами разрезной азбуки: А, А, Н, Г, Д, У. Какова вероятность того, что при случайном разложении букв в ряд он получит слово НАУГАД?

2. В ящике 10 красных и 12 синих пуговиц. Вынимаются наудачу 2 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

3. В круг радиуса 4 вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что на каждый малый сегмент попадет по одной точке.

4. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,75, второго – 0,85, третьего – 0,95. Найти вероятность того, что: а) откажут два станка; б) все три станка будут работать безотказно; в) хотя бы один станок откажет в работе.

5. Из пяти винтовок, из которых три снайперские и две обычные, наудачу выбирается одна, и из нее производится выстрел. Найти вероятность попадания в мишень, если вероятность попадания из снайперской винтовки 0,95, а из обычной 0,7.

6. Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем первое и второе хозяйства присылают по 40 % всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства равна 90 %, второго – 85 %, третьего – 95 %. Наудачу взятое семя не взошло. Какова вероятность, что оно получено из второго хозяйства?

7. В среднем по 15 % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из 10 договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров.

8. Монета подброшена 100 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет 45 раз.

9. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

10. Торговый агент имеет пять телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 2Y - 7X$.

$X=x_i$	-2	-1
$P(X=x_i)=p_i$	0,15	0,85

$Y=y_k$	1	2	3
$P(Y=y_k)=p_k$	0,2	0,25	p_3

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin 2x & \text{при } x \in [0; \pi/6], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \pi/6], \end{cases} \quad x_1 = 0,\ x_2 = \pi/8.$$

13. Производится два независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку 2 мм и среднеквадратичное отклонение 1 мм. Какова вероятность того, что измеренные значения будут отклоняться от истинного не более чем на 3 мм?

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(2,0)$; $B(2,-2)$; $C(0,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} (x-4)/2, & x \in [4,6] \\ 0, & x \notin [4,6] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 14

1. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этих этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что: а) все пассажиры вышли на разных этажах; б) все вышли на пятом этаже.

2. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что они все: а) разных цветов; б) одного цвета?

3. В круг радиуса 4 вписан правильный шестиугольник. Внутрь круга наудачу брошены две точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь шестиугольника.

4. В группе из 25 человек 10 учатся на «отлично», 8 – на «хорошо» и 7 – на «удовлетворительно». Найти вероятность того, что из взятых наугад 8 человек 3 человека учатся на «отлично».

5. В первой урне два белых и восемь черных шаров, во второй – три белых и два черных. Из первой урны во вторую переложили шесть шаров, затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй урны шар белый.

6. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем первый завод поставляет 50% изделий, второй – 30 %, третий – 20 %. Среди изделий первого завода 90 % первосортных, второго – 80 %, третьего – 70 %. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено вторым заводом.

7. Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки – 0,485. В некоторой семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди них не больше четырех девочек.

8. Садоводческий кооператив застраховал на год свои дачные дома от пожара. Каждый из 600 домовладельцев внес по 150 рублей. Вероятность пожара (в одном доме) в течение года равна 0,005, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшему, составляет 12 000 рублей. Какова вероятность того, что страховая компания понесет убыток?

9. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Найти вероятность того, что из 1000 изделий не выдержат испытаний 5.

10. Вероятность того, что аудитор допустит ошибку при проверке бухгалтерского баланса, равна 0,05. Аудитору на заключение представлено два баланса. Составить закон распределения и построить график функции распределения числа правильных заключений на проверяемые балансы.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 5X - 4Y$.

$X=x_i$	-1	1	2
$P(X=x_i)=p_i$	0,18	p_2	0,62

$Y=y_k$	1	4
$P(Y=y_k)=p_k$	0,37	0,63

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{x^3 - x}{60} & \text{при } 1 < x < 4, \\ 1 & \text{при } x \ge 4. \end{cases} \quad x_1 = 1, \; x_2 = 2.$$

13. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднеквадратичное отклонение 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из случайно выбранных двух мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-2,2)$; $B(2,0)$; $C(0,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}2(x-3), & x\in[3,4]\\ 0, & x\notin[3,4]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 15

1. В лифт 7-этажного дома на первом этаже вошли два человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этих этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что: а) все пассажиры вышли на разных этажах; б) все вышли на четвертом этаже.

2. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук. Вынуты наудачу три лампы. Какова вероятность того, что: а) они одинаковой мощности; б) хотя бы две из них по 100 Вт?

3. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. Внутрь круга наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что все точки попали внутрь шестиугольника.

4. В организации работают 12 мужчин и 8 женщин. Для них выделено три премии. Определить вероятность того, что премию получат: а) двое мужчин и одна женщина; б) только женщины в) хотя бы один мужчина.

5. В первой урне шесть белых и шесть черных шаров, во второй – три белых и три черных. Из первой урны во вторую переложили пять шаров, затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй урны шар белый.

6. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40 % всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный замок является дефектным; б) случайно выбранный замок был изготовлен в первом цехе при условии, что этот замок оказался дефектным.

7. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти

вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.

8. При установившемся технологическом процессе производится 97 % изделий первого сорта и 3 % изделий второго сорта. Какова вероятность того, что среди 2000 наугад взятых изделий не более 80 окажутся второго сорта?

9. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.

10. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 4X - 5Y$.

$X=x_i$	5	10
$P(X=x_i)=p_i$	0,24	0,76

$Y=y_k$	–3	6	9
$P(Y=y_k)=p_k$	p_1	0,3	0,4

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 & \text{при } x \in [-2;\,2], \\ 0 & \text{при } x \notin [-2;\,2], \end{cases} \quad x_1 = -1, \ x_2 = 1.$$

13. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5 % коробок имеют массу, меньше 500 г. Каков процент коробок, масса которых от 500 до 550 г?

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические

ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-1,0)$; $B(0,1)$; $C(0,-1)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3]\\ 0, & x\notin[1,3]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 16

1. Наудачу набранный номер состоит из пяти цифр. Определить вероятность того, что все цифры в нем различны.

2. Из 15 строительных рабочих 10 – штукатуры, а 5 – маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 3 маляра и 2 штукатура?

3. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. Внутрь круга наудачу брошены две точки. Найти вероятность того, что все точки не попали внутрь шестиугольника.

4. Два игрока поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет «герб». Найти вероятность того, что выиграл первый игрок до четвертого броска.

5. У рыбака имеется два места ловли рыбы, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,6, на втором – с вероятностью 0,7. Рыбак, выйдя на ловлю в одно из мест, два раза закинул удочку. Найти вероятность того, что рыба клюнет только один раз.

6. Имеется три урны. В первой урне шесть черных и четыре белых шара, во второй пять белых и пять черных шаров, в третьей семь белых и три черных шара. Случайно выбирается урна, и из нее извлекается шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что выбрана вторая урна.

7. Найти вероятность того, что в серии из девяти подбрасываний игральной кости пять очков выпадет менее трех раз.

8. При установившемся технологическом процессе производится 95 % изделий первого сорта и 5 % изделий второго сорта. Какова вероятность того, что среди 1000 наугад взятых изделий не более 60 окажутся второго сорта?

9. В новом микрорайоне поставлено 10 000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут 2, 3 и 5 замков.

10. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из пяти выданных. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 3X - 6Y$.

$X = x_i$	–4	1	4
$P(X = x_i) = p_i$	0,3	p_2	0,5

$Y = y_k$	2	3
$P(Y = y_k) = p_k$	0,64	0,36

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x < 3, \\ 1 & \text{при } x \ge 3. \end{cases} \quad x_1 = 2{,}5,\ x_2 = 3.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\,\mathrm{e}^{-3x^2 - 3x}$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 3/2$.

14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-2{,}0)$; $B(-2{,}-2)$; $C(0{,}0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} (x-4)/2, & x \in [4{,}6] \\ 0, & x \notin [4{,}6] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 17

1. Из колоды в 36 карт наугад выбирают две карты. Какова вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз?

2. В ящике находятся катушки четырех цветов: белых катушек 40 %, красных – 20 %, зеленых – 30 %, синих – 10 %. Какова вероятность того, что взятая наудачу катушка будет белой или синей?

3. В шар радиуса 2 вписан куб. Найти вероятность того, что четыре точки, поставленные наудачу внутрь шара, окажутся внутри куба.

4. В урне имеются 10 белых, 5 черных и 15 красных шаров. Извлекается последовательно 2 шара. Рассматриваются два события: A – хотя бы один шар из двух вынутых красный; B – хотя бы один вынутый шар белый. Найти вероятность события $C = A + B$.

5. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это: а) сапоги, б) туфли?

6. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,7, а у второго 0,6. В результате первого залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

7. Вероятность выигрыша по облигации займа за все время его действия равна 0,25. Какова вероятность того, что некто, приобретя восемь облигаций, выиграет не менее чем по трем из них?

8. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,03. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 100.

9. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 700 и 750, если вероятность того, что отдельное изделие будет высшего сорта, равна 0,9.

10. Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает пять очков, а в случае промаха очки ему не начисляют. Составить закон распределения числа очков, полученных стрелком за три выстрела. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 4Y - 3X$.

$X = x_i$	1	6
$P(X = x_i) = p_i$	0,43	0,57

$Y = y_k$	2	3	6
$P(Y = y_k) = p_k$	p_1	0,25	0,35

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(a-1) & \text{при } x \in [1;\, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [1;\, 3], \end{cases} \quad x_1 = 2, \; x_2 = 4.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = a\, \mathrm{e}^{-4x^2 + 6x + 3}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3/4.$$

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми ? $A(0,-1)$; $B(-1,0)$; $C(0,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x\notin[1,2]\\ 0, & x\notin[1,2]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 18

1. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти карты будут разных мастей.

2. На стеллаже 15 учебников, 5 из них в переплете. Наудачу выбирают 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплете?

3. В шар радиуса 3 вписан куб. Найти вероятность того, что три точки, поставленные наудачу внутрь шара, окажутся внутри куба.

4. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена – 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен?

5. В пункте проката имеется восемь новых и десять подержанных (т. е. хотя бы раз использованных) автомобилей. Три машины взяли наудачу в прокат и спустя некоторое время вернули. После этого вновь наудачу взяли в прокат два автомобиля. Какова вероятность того, что оба автомобиля новые?

6. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем 3/4 продукции с процентом брака 4 %, вторая –

1/4 продукции с процентом брака 6 %. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

7. По каналу связи передаются семь сообщений, каждое из которых, независимо от других, может быть искажено с вероятностью 0,15. Найти вероятность того, что будет правильно принято не менее двух сообщений.

8. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,04. Найти вероятность попадания в цель трех и более пуль, если число выстрелов равно 1200.

9. Какова вероятность того, что из 2450 ламп, освещающих улицу, к концу года будут гореть от 1500 до 1600 ламп? Считать, что каждая лампа будет гореть в течение года с вероятностью 0,64.

10. Вероятность сбоя в работе АТС равна 0,1. Составить закон распределения числа сбоев, если в данный момент поступило пять вызовов. Построить график функции распределения данной случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 4X - 6Y$.

$X=x_i$	2	4	8
$P(X=x_i)=p_i$	p_1	0,5	0,3

$Y=y_k$	3	6
$P(Y=y_k)=p_k$	0,41	0,59

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } x \in [a; 3], \\ 0 \text{ при } x \notin [a; 3], \end{cases} \quad x_1 = 0, \; x_2 = 2.$$

13. Среднее время работы каждой из двух радиоламп соответственно равно 900 и 800 ч. Определить вероятность того, что, по крайней мере, одна из них проработает не менее 950 ч.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,-1)$; $B(1,0)$; $C(-1,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3]\\ 0, & x\notin[1,3]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной со стороной X.

Вариант 19

1. Найти вероятность того, что из 10 книг, расположенных в случайном порядке, три определенные книги окажутся рядом.

2. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность того, что среди пяти проданных в течение дня телевизоров окажется более трех импортных, предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.

3. В шар радиуса 4 вписан куб. Найти вероятность того, что две точки, поставленные наудачу внутрь шара, окажутся внутри куба.

4. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее, чем в двух справочниках.

5. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;

б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

6. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,6, а у второго – 0,4. В результате первого залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

7. Вероятность того, что в результате пяти независимых опытов событие A (предполагается, что оно одно и то же во всех опытах) произойдет хотя бы один раз, равна 0,99757. Определить вероятность появления события при одном опыте.

8. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50 % студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят: а) 180 студентов; б) не менее 180 студентов.

9. Прибор содержит 1000 элементов, каждый из которых за время t может выйти из строя независимо от других с вероятностью 0,002. Какова вероятность выхода из строя за время t прибора, если это происходит при отказе хотя бы одного из элементов?

10. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,15. Составить закон распределения отказавших элементов. Построить график функции распределения.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 2X - 4Y$.

$X=x_i$	–2	2	4
$P(X=x_i)=p_i$	0,22	p_2	0,48

$Y=y_k$	–3	3
$P(Y=y_k)=p_k$	0,4	0,6

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x)=\begin{cases} a \text{ при } x\in[1;4], \\ 0 \text{ при } x\notin[1;4], \end{cases} \quad x_1=1{,}5,\ \ x_2=2.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1<X<x_2$: $f(x)=a\mathrm{e}^{-2x^2+8x-1}$, $x_1=1$, $x_2=3$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,-1)$; $B(-2,0)$; $C(0,2)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-2)/2, & x\in[2,4] \\ 0, & x\notin[2,4]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 20

1. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

2. Из 25 работников предприятия 10 имеют высшее образование: Определить вероятность того, что из случайно отобранных трех человек высшее образование имеют: а) три человека; б) один человек.

3. В квадрат вписан круг. Какова вероятность, что точка, брошенная наудачу в квадрат, не окажется внутри круга ?

4. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

5. Имеются две партии изделий по 10 и 12 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

6. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал стрелок?

7. Проведено восемь независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании двух монет. Найти вероятность того, что: а) в трех испытаниях из восьми появится по два герба; б) не менее двух раз выпадет два герба.

8. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров более 36 выдержат гарантийный срок.

9. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,005. Какова вероятность попадания в цель не менее трех раз, если число выстрелов равно 800?

10. Бросают три игральные кости. Составить закон распределения числа выпавших «шестерок» на трех костях. Построить многоугольник распределения и график функции распределения.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 12X - 2Y$.

$X=x_i$	–2	–1
$P(X=x_i)=p_i$	0,35	0,65

$Y=y_k$	2	4	5
$P(Y=y_k)=p_k$	0,3	0,4	p_3

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию

$D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a/(x-1) & \text{при } 2 \le x \le 3, \\ 0 & \text{при } x < 2 \text{ или } x > 3, \end{cases} \quad x_1 = 1{,}5, \ x_2 = 2.$$

13. Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке имеет нулевое математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение, равное 5 мк. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более чем на 2 мк?

14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0{,}1)$; $B(-2{,}2)$; $C(-2{,}0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} (x-2)/2, & x \in [2{,}4] \\ 0, & x \notin [2{,}4] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 21

1. На семи одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 8, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

2. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся: а) четыре девушки; б) четыре юноши; в) три юноши и одна девушка?

3. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Опреде-

лить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину 1/5.

4. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

5. В двух урнах находится соответственно 8 и 10 белых и 5 и 12 черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух шаров наудачу берется один. Какова вероятность, что этот шар белый?

6. На елочный базар поступают елки с трех лесхозов, причем первый лесхоз поставил 50 % елок, второй – 30 %, третий – 20 %. Среди елок первого лесхоза 10 % голубых, второго – 20 %, третьего – 30 %. Куплена одна елка. Она оказалась голубой. Какова вероятность, что она поставлена вторым лесхозом?

7. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух, в трех и в четырех магазинах.

8. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из 2 тыс. следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов будет: а) ровно 48; б) находиться в границах от 45 до 55?

9. Найти вероятность того, что число мальчиков среди 1000 новорожденных больше 480, но меньше 540 (вероятность рождения мальчика принять равной 0,515).

10. Известно, что в партии из 20 телефонных аппаратов имеется пять недействующих. Случайным образом из этой партии взято четыре аппарата. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – числа недействующих аппаратов из выбранных.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 5X - 3Y$.

$X=x_i$	1	3	5
$P(X=x_i)=p_i$	p_1	0,3	0,5

$Y=y_k$	2	6
$P(Y=y_k)=p_k$	0,37	0,63

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{при } 2 \le x \le 4, \\ 0 & \text{при } x < 2 \text{ или } x > 4, \end{cases} \qquad x_1 = 1, \ x_2 = 3.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\mathrm{e}^{-2x^2-8x-1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-3,-3)$; $C(3,-3)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 22

1. Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы, и повесила их наугад. Найти вероятность того, что она каждому выдаст его собственную шляпу.

2. 20 машин были доставлены на станцию технического обслуживания. При этом 5 из них имели неисправность в ходовой части, 8 имели неисправности в моторе, а 10 были полностью исправны. Какова вероятность, что машина с неисправной ходовой частью имеет также неисправный мотор?

3. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка не превосходит величину 1/5.

4. В первой бригаде из 8 тракторов 2 требуют ремонта, во второй из 6 тракторов ремонта требует 1. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Определить вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) хотя бы один исправен; в) только один исправен.

5. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

6. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго 0,02, у третьего 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие изготовил второй рабочий.

7. Проводится пять независимых повторных измерений. Вероятность того, что при любом измерении ошибка превысит заданную точность, равна 0,1. Какова вероятность того, что, по крайней мере, в трех измерениях подряд была достигнута заданная точность?

8. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятности того, что на базу прибудет: а) ровно три, б) не более трех негодных изделий.

9. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70 % студентов. Какова вероятность того, что из

150 студентов работу успешно выполнят: а) 90 студентов; б) не менее 90 студентов; в) не более 100 студентов?

10. Имеются три базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить некий товар. Составить закон распределения числа баз, на которых в данный момент этот товар отсутствует. Построить график функции распределения.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 7X - 6Y$.

$X=x_i$	–3	–2	0
$P(X=x_i)=p_i$	0,3	0,3	p_3

$Y=y_k$	2	3
$P(Y=y_k)=p_k$	0,48	0,52

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{1}{6}(x^3 - x) & \text{при } 1 < x < 2, \\ 1 & \text{при } x \ge 2. \end{cases} \quad x_1 = 1,\; x_2 = 1{,}5.$$

13. Время безотказной работы радиоаппаратуры распределено по показательному закону. Математическое ожидание числа отказов радиоаппаратуры за 10 000 ч работы равно 10. Определить вероятность отказа радиоаппаратуры за 2000 ч работы.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(0,-2)$; $C(-2,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-3)/2, & x\in[3,5]\\ 0, & x\notin[3,5]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 23

1. В ящике лежат девять кубиков с номерами от 1 до 9. Последовательно извлекаются три кубика. Найти вероятность того, что появятся кубики: а) с номерами 2, 5, 9; б) с номерами 5, 2, 9; в) с номерами 4, 5, 4.

2. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.

3. В круг радиуса R вписан квадрат. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри квадрата?

4. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условное место, соответственно равны: $p=0{,}8$; $p=0{,}4$; $p=0{,}7$. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трех друзей.

5. Из 1000 ламп 590 принадлежит первой партии, 200 – второй, остальные – третьей партии. В первой партии 6 %, во второй – 5 %, в третьей – 4 % бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что она бракованная?

6. В магазин трикотажных изделий поступили носки, 60 % которых получено от одной фабрики, 25 % – от другой и 15 % – от третьей. Найти вероятность того, что приобретенные покупателем носки изготовлены на второй или третьей фабрике.

7. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах цель будет поражена: а) два раза; б) не менее двух раз; в) не будет поражена ни разу.

8. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется пригодным без доводки, равна 0,97. Контролер проверяет 400 изделий. Если среди них окажется 16 или более нуждающихся в доводке, вся партия возвращается на доработку. Найти вероятность того, что партия изделий будет принята.

9. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.

10. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлены три светофора. Они независимо друг от друга запрещают проезд с вероятностью $3/5$ и разрешают с вероятностью $2/5$. Написать закон распределения случайной величины X – числа остановок автомобиля на этой улице.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 3X - 2Y$.

$X=x_i$	–20	–10
$P(X=x_i)=p_i$	0,34	0,66

$Y=y_k$	0	10	20
$P(Y=y_k)=p_k$	p_1	0,6	0,3

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -\pi/2, \\ 0{,}5(\sin x + 1) & \text{при } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 1 & \text{при } x \ge \pi/2. \end{cases} \quad x_1 = 0, \; x_2 = \pi/6.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\mathrm{e}^{-2x^2-8x-4}$, $x_1 = -3/2$, $x_2 = -1$.

14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить мар-

гинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,-1)$; $B(0,0)$; $C(1,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}2(x-3), & x\in[3,4]\\ 0, & x\notin[3,4]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 24

1. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от 0 до 9. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек: а) двузначное число делится на 18; б) трехзначное число делится на 36.

2. На связке пять ключей. К замку подходит только один ключ. Найти вероятность того, что потребуется не более двух попыток открыть замок, если опробованный ключ в дальнейших испытаниях не участвует.

3. В течение промежутка времени от 11 ч до 11 ч 30 мин должен последовать телефонный звонок. Какова вероятность, что звонок последует в последние 10 мин указанного промежутка времени?

4. Вероятность того, что хотя бы один из трех покупателей приобретет определенный товар, равна 0,784. Вероятности покупки товара покупателями одинаковы. Определить вероятность того, что: а) два покупателя совершат покупки; б) три покупателя совершат покупки.

5. Студент в поисках книги посещает три библиотеки. Вероятности того, что они есть в библиотеках, равны 0,4, 0,5, 0,1, а того, что они выданы или их нет – равновероятные события. Какова вероятность того, что нужная книга найдена?

6. Прибор состоит из двух узлов (работа каждого узла необходима для функционирования прибора в целом). Вероятность безотказной работы в течение времени t первого узла равна 47 %, второго – 52 %.

Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй – исправен.

7. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «А», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется: а) не менее чем двум покупателям; б) не более чем трем покупателям; в) всем четырем покупателям.

8. В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая, и вероятность такого события.

9. Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа: а) двух; б) не менее двух элементов за год?

10. В коробке 20 одинаковых катушек ниток, из них четыре катушки с белыми нитками. Наудачу вынимают две катушки. Найти закон распределения числа катушек с белыми нитками среди вынутых. Построить график функции распределения.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины W=9X–3Y.

$X=x_i$	1	2	3
$P(X=x_i)=p_i$	0,2	p_2	0,6

$Y=y_k$	–3	–2
$P(Y= y_k)=p_k$	0,46	0,54

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ \ln x & \text{при } 1 < x < e, \\ 1 & \text{при } x \ge e. \end{cases} \quad x_1 = 2,\ x_2 = e.$$

13. Чему равна вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 1, примет значение из интервала (0,3, 3,5) не менее двух раз в трех независимых испытаниях.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(0,1)$; $C(1,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-2)/2, & x\in[2,4]\\ 0, & x\notin[2,4]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 25

1. В урне пять белых и восемь черных шаров. Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность того, что два из них будут белыми, а три черными.

2. Пять томов собрания сочинений расположены на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?

3. Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно $k\ r$ (k =1, 2, 3, 4, 5). Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ наудачу выбрана точка. Определить вероятность попадания этой точки в заштрихованную область.

4. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, из второго 0,91. Найти вероятность поражения цели.

5. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

6. Некто, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело пять дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог равны соответственно 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Чему равна вероятность того, что заблудившийся пошел по первой дороге, если известно, что он вышел из леса через час?

7. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,1. Найти вероятность того, что за время t из семи малых предприятий сохранятся: а) три; б) более трёх.

8. Сообщение содержит 500 символов. Вероятность искажения символа при передаче постоянна и равна p. Если хотя бы один символ искажен, то сообщение будет принято неверно. При каких значениях p вероятность того, что сообщение будет успешно передано, окажется равной 0,95?

9. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий отклонение числа изделий первого сорта от наивероятнейшего числа не превысит по абсолютной величине 50, если вероятность появления изделия первого сорта равна 0,7.

10. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Найти закон распределения числа дефектных курток среди купленных. Построить график функции распределения.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 10X - 3Y$.

$X=x_i$	5	10	15
$P(X=x_i)=p_i$	0,02	p_2	0,68

$Y=y_k$	20	30
$P(Y=y_k)=p_k$	0,4	0,6

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$,

дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 3, \\ \dfrac{x^4 - 81}{175} & \text{при } 3 < x < 4, \quad x_1 = 3{,}2, \ x_2 = 3{,}5. \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

13. Время безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием 120 ч. Определить вероятность безотказной работы двигателя за 1000 ч.

14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольнике ABC. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(-3,3)$; $C(-3,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 26

1. Телефонный номер состоит из семи цифр. Определить вероятность того, что при случайном наборе номер будет оканчиваться на 240.

2. На полке стоят десять книг, среди которых три книги по теории вероятностей. Наудачу берутся три книги. Какова вероятность, что среди отобранных хотя бы одна книга по теории вероятностей?

3. На плоскости проведены параллельные линии, расстояние между которыми 6 см. Определить вероятность того, что наудачу бро-

шенный на эту плоскость круг радиуса 1 не будет пересечен ни одной линией.

4. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий: а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

5. В пункте проката имеется восемь телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,9, и шесть телевизоров с вероятностью безотказной работы в течение месяца, равной 0,95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут исправно работать в течение месяца.

6. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90 %, второй – 85 %, третьей – 75 %. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие изготовлено третьей фирмой при условии, что оно оказалось стандартным.

7. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,7. Событие B наступает с вероятностью 1, если событие A произошло не менее трех раз; не может наступить, если событие A не имело места и наступает с вероятностью 0,4, если событие A имело место один раз. Определить вероятность появления события B.

8. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа из строя выйдут два, три и пять автоматов?

9. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,15. Определить вероятность того, что за время T из 80 конденсаторов выйдут из строя менее 10.

10. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено три баланса предприятия. Составить закон распределения и по-

строить график функции распределения числа положительных заключений на проверяемые балансы.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 7X - Y$.

$X=x_i$	10	12
$P(X=x_i)=p_i$	0,33	0,67

$Y=y_k$	15	17	20
$P(Y=y_k)=p_k$	0,5	0,3	p_3

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 4x^3 & \text{при } x \in [0,2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0,2], \end{cases} \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

13. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 3 мм. Систематическая ошибка измерительного прибора отсутствует. Найти вероятность того, что в двух независимых измерениях ошибка хотя бы один раз окажется в интервале (–1, 1).

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в трапеции $ABCD$. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-2,0)$; $B(-1,-2)$; $C(0,-2)$; $D(0,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} (x-3)/2, & x \in [3,5] \\ 0, & x \notin [3,5] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 27

1. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова: а) «событие»; б) «статистика».

2. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне пять белых, четыре черных и шесть красных шаров, а во второй соответственно четыре, шесть и два. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

3. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 2 ч, а второго 3 ч.

4. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна 0,2. При повышенном напряжении вероятность выхода из строя одного прибора равна 0,4, другого 0,3. Определить вероятность выхода из строя только одного прибора вследствие повышения напряжения.

5. В правом кармане имеются пять монет по 20 руб. и три монеты по 50 руб., а в левом – три по 20 руб. и две по 50 руб. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются две монеты. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты в 50 руб.

6. Трое охотников одновременно выстрелили по кабану, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что кабан убит первым охотником, если вероятности попадания для них равны 0,7; 0,6 и 0,8.

7. Событие B наступит в том случае, если событие A появится не менее 3 раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном опыте равна 0,6 и произведено пять независимых опытов.

8. Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых опытах равна 0,98. Какова вероятность появления со-

бытия A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

9. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий более трех изделий не выдержат испытания?

10. Каждый поступающий в институт должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа экзаменов, сдававшихся абитуриентом. Построить график функции распределения случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 8Y - 2X$.

$X=x_i$	–3	3	4
$P(X=x_i)=p_i$	0,2	p_2	0,4

$Y=y_k$	2	5
$P(Y=y_k)=p_k$	0,41	0,59

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3x^2 & \text{при } x \in [1;3], \\ 0 & \text{при } x \notin [1;3], \end{cases} \qquad x_1 = 0{,}5, \ \ x_2 = 1{,}5.$$

13. Четыре независимых измерения производят прибором, имеющим систематическую ошибку 2 мм и дисперсию 9 мм^2. Какова вероятность того, что хотя бы одно измеренное значение будет отклоняться от истинного не более чем на 4 мм?

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в трапеции $ABCD$. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент кор-

реляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(0,-1)$; $C(1,-1)$; $D(2,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-3)/2, & x\in[3,5]\\ 0, & x\notin[3,5]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Вариант 28

1. Студент подготовил ответы на 45 из 60 вопросов программы. Какова вероятность, что он знает ответы только на два вопроса из трех, которые ему предложат на экзамене?

2. В коробке из 25 изделий 15 повышенного качества. Наудачу извлекаются три изделия. Определить вероятность того, что: а) одно из них повышенного качества; б) все три изделия повышенного качества; в) хотя бы одно изделие повышенного качества.

3. На плоскости проведены параллельные линии, расстояние между которыми 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2 не будет пересечен ни одной линией.

4. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом: а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам.

5. В пункте проката имеется 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,95, и 6 телевизоров с вероятностью безотказной работы в течение месяца, равной 0,9. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут исправно работать в течение месяца.

6. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55 % изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное

изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.

7. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) менее трех.

8. С вероятностью 0,4 посланное сообщение принимается при одной передаче. Сколько надо сделать передач, чтобы с вероятностью не менее 0,9 она была принята хотя бы один раз?

9. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,1. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя не менее 12.

10. Имеются шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих пробах не участвует. Построить график функции распределения данной случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 6X - 2Y$.

$X=x_i$	1	3	4
$P(X=x_i)=p_i$	0,2	p_2	0,6

$Y=y_k$	2	4
$P(Y=y_k)=p_k$	0,35	0,65

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & \text{при } x \in [0;3], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;3], \end{cases} \quad x_1 = -1, \; x_2 = 2.$$

13. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 4 мм. Систематическая ошибка измерительного прибора отсутствует. Найти вероятность то-

го, что в трех независимых измерениях ошибка хотя бы один раз окажется в интервале (0,2).

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в трапеции $ABCD$. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-2{,}0)$; $B(-1{,}1)$; $C(0{,}1)$; $D(0{,}0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3]\\ 0, & x\notin[1,3]\end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Вариант 29

1. В коробке находятся жетоны с цифрами от 1 до 10. Наудачу извлекаются два жетона. Какова вероятность того, что будут вынуты: а) оба жетона с нечетными номерами; б) хотя бы один жетон с нечетным номером; в) один жетон с четным номером?

2. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано пять сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных в черте города окажется: а) три сбербанка; б) хотя бы один?

3. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 3 ч, а второго 2,5 ч.

4. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна 0,3. При повышенном напряжении вероятность выхода из строя одного прибора равна 0,1, друго-

го 0,3. Определить вероятность выхода из строя только одного прибора вследствие повышения напряжения.

5. В правом кармане имеются четыре монеты по 20 руб. и две монеты по 50 руб., а в левом – шесть по 20 руб. и три по 50 руб. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются три монеты. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты в 20 руб.

6. Трое охотников одновременно выстрелили по кабану, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что кабан убит третьим охотником, если вероятности попадания для них равны 0,6; 0,7 и 0,8.

7. Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки 0,485. В некоторой семье четверо детей. Найти вероятность того, что среди них не больше двух девочек.

8. Вероятность хотя бы одного появления события при шести независимых опытах равна 0,95. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

9. Вероятность изготовления доброкачественного изделия равна 0,9. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 300 изделий 95 % доброкачественных.

10. Техническое устройство состоит из пяти элементов, работающих независимо. Вероятность отказа первого элемента равна 0,1, второго и третьего 0,3, четвертого и пятого 0,2. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – числа отказавших элементов.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины W=3X–Y.

$X=x_i$	10	30	40
$P(X=x_i)=p_i$	p_1	0,22	0,64

$Y=y_k$	2	3
$P(Y=y_k)=p_k$	0,4	0,6

12. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию

$D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{при } x\in[1;3], \\ 0 & \text{при } x\notin[1;3] \end{cases} \quad x_1=-0,\ x_2=2.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x)=a\mathrm{e}^{-2x^2+3x-4}$, $x_1=-1$, $x_2=5/2$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в трапеции $ABCD$. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(0,2)$; $C(1,2)$; $D(2,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases} x/2, & x\in[0,2] \\ 0, & x\notin[0,2] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

Вариант 30

1. Телефонный номер состоит из шести цифр. Определить вероятность того, что при случайном наборе номер будет оканчиваться на 787.

2. Среди 20 поступающих в ремонт часов 8 нуждаются в общей чистке механизма. Какова вероятность того, что среди взятых одновременно наудачу 8 часов, по крайней мере, 2 нуждаются в общей чистке механизма?

3. На плоскости проведены параллельные линии, расстояние между которыми 10 см. Определить вероятность того, что наудачу бро-

шенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 не будет пересечен ни одной линией.

4. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,5, третьим – 0,4. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

5. В пункте проката имеется пять телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,8, и десять телевизоров с вероятностью безотказной работы в течение месяца, равной 0,95. Найти вероятность того, что три телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут исправно работать в течение месяца.

6. В сентябре вероятность дождливого дня равна 0,3. Команда «Статистик» выигрывает в футбол в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день эта вероятность равна 0,3. Известно, что в сентябре они выиграли некоторую игру. Какова вероятность, что в тот день: а) шел дождь; б) был ясный день?

7. Производится шесть независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,6. Событие B наступает с вероятностью 1, если событие A произошло не менее пяти раз; не может наступить, если событие A не имело места, и наступает с вероятностью 0,2, если событие A имело место один раз. Определить вероятность появления события B.

8. Стрелок сделал 80 выстрелов; вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что: а) стрелок попадет 56 раз; б) число попаданий будет заключено между 50 и 60.

9. Посеяли 1000 семян. Вероятность не прорасти для каждого семени равна 0,002. Найти вероятность того, что: а) не прорастет 10 семян; б) все семена прорастут.

10. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется шесть бракованных, выбраны случайным образом три изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения и график функции распределения случайного числа X бракованных изделий среди отобранных.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределений. Составить законы распределения случайных величин

$Z = X + Y$ и $V = XY$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 5X - 2Y$.

$X=x_i$	1	3	7
$P(X=x_i)=p_i$	0,3	p_2	0,5

$Y=y_k$	5	9
$P(Y=y_k)=p_k$	0,42	0,58

12. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x^4/16 & \text{при } 0 < x < 2, \\ 1 & \text{при } x \ge 2. \end{cases} \quad x_1 = 1,\ x_2 = 1{,}5.$$

13. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$: $f(x) = a\mathrm{e}^{-5x^2+2x-1}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

14. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в трапеции $ABCD$. Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x), f_2(y)$, математические ожидания $M(X), M(Y)$, дисперсии $D(X), D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(0,0)$; $B(0,2)$; $C(2,2)$; $D(1,0)$.

15. Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} 2(x-3), & x \in [3,4] \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь равностороннего треугольника со стороной X.

Примеры решения задач типового варианта

Пример 1

В альбоме десять чистых и восемь гашеных марок. Из него наудачу извлекают три марки, которые подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекаются 4 марки. Определить вероятность того, что все четыре марки чистые.

Решение

Событие A, состоящее в том, что извлеченные из альбома четыре марки окажутся чистыми, может произойти при условии появления одного из несовместных событий:

H_1 – все три марки, извлеченные для спецгашения, были чистые;

H_2 – среди марок, извлеченных для спецгашения, были две чистые и 1 гашеная;

H_3 – среди марок, извлеченных для спецгашения, были одна чистая и 2 гашеные;

H_4 – все три марки, извлеченные для спецгашения, были гашеные.

Каждая из гипотез H_i является сложным событием, т. е. выражается через другие события с помощью алгебраических операций. Например, $H_1 = B_1 B_2 B_3$, $H_2 = B_1 B_2 \overline{B}_3 + B_1 \overline{B}_2 B_3 + \overline{B}_1 B_2 B_3$, где событие B_i состоит в том, что i-я марка ($i = \overline{1,3}$), извлеченная для спецгашения, была чистая; $\overline{B}_i$ – противоположное событие (i-я марка была гашеная).

Находим вероятности гипотез, используя формулу умножения вероятностей для $n = 3$ зависимых событий, а при вычислении $P(H_2)$ и $P(H_3)$ еще и формулу сложения вероятностей для несовместных событий (см. п. 1.5):

$$P(H_1) = 10/18 \cdot 9/17 \cdot 8/16 = 5/34 \approx 0{,}147.$$

$$P(H_2) = 3 \cdot 10/18 \cdot 9/17 \cdot 8/16 = 15/34 \approx 0{,}441.$$

$$P(H_3) = 3 \cdot 10/18 \cdot 8/17 \cdot 7/16 = 35/102 \approx 0{,}343.$$

$$P(H_4) = 8/18 \cdot 7/18 \cdot 6/16 = 7/102 \approx 0{,}069.$$

Проверка: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 1$.

Вычисляем условные вероятности. При выполнении гипотезы H_1 в альбоме останется 7 чистых и 11 гашеных марок:

$$P(A/H_1) = C_7^4 / C_{18}^4 = 0{,}011.$$

При выполнении гипотезы H_2 в альбоме останется 8 чистых и 10 гашеных марок:

$$P(A/H_2) = C_8^4 / C_{18}^4 = 0{,}023.$$

Аналогично рассуждая, получим:

$$P(A/H_3) = C_9^4 / C_{18}^4 = 0{,}041,$$

$$P(A/H_4) = C_{10}^4 / C_{18}^4 = 0{,}069.$$

По формуле полной вероятности (см. п. 1.6)

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4) = 0{,}03.$$

Заметим, что вероятности $P(A/H_i)$, $i = \overline{1,3}$, можно вычислить иначе, используя формулу умножения для $n = 4$ зависимых событий (см. п. 1.5). Например, $P(A/H_1) = 7/18 \cdot 6/17 \cdot 5/16 \cdot 4/15 = 0{,}011$.

Пример 2

Дана плотность распределения случайной величины X: $f(x) = = a\mathrm{e}^{-3x^2 - 3x + 1}$. Найти параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$, вероятность выполнения неравенства $-1/2 < X < 3/2$.

Решение

1. Величину параметра a находим, используя свойство плотности распределения (см. п. 2.1, свойство 2):

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2-3x+1}\,dx}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2-3x+1}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3(x^2+x-1/3)}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3\left[(x+1/2)^2-1/4-1/3\right]}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3(x+1/2)^2+7/4}\,dx = e^{7/4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{3}(x+1/2)\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{e^{7/4}}{\sqrt{3}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{3}(x+1/2)\right)^2}\,d\left(\sqrt{3}(x+1/2)\right) = \frac{e^{7/4}}{\sqrt{3}}\sqrt{\pi},$$

так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Следовательно, $a = \sqrt{3/\pi}\,e^{-7/4}$.

2. С учетом выполненных преобразований плотность распределения можно представить в виде:

$$f(x) = \sqrt{3/\pi}\cdot e^{-7/4}\cdot e^{-3(x+1/2)^2+7/4} = \sqrt{3/\pi}\cdot e^{-3(x+1/2)^2} =$$

$$= \sqrt{3/\pi}\cdot e^{\frac{-(x+1/2)^2}{1/3}}.$$

Сравнивая полученное выражение с плотностью нормального распределения (см. п. 2.3), можно заметить, что если $2\sigma^2 = 1/3$, то $\sigma = 1/\sqrt{6}$ и, следовательно, $1/\sigma\sqrt{2\pi} = \sqrt{6}/\sqrt{2\pi} = \sqrt{3/\pi}$. Таким образом, заданная случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m = -1/2$ и $\sigma = 1/\sqrt{6}$.

3. $M(X)$ и $D(X)$ находим, исходя из смысла параметров плотности нормального распределения (см. п. 2.3):

$$M(X) = -1/2,\;\; D(X) = \sigma^2 = 1/6.$$

4. Так как случайная величина X распределена нормально, то

$F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right) + 0{,}5$ (см. п. 2.3).

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x+1/2}{1/\sqrt{6}}\right) + 0{,}5 = \Phi\left(\sqrt{6}(x+1/2)\right) + 0{,}5 .$$

5. $P(-1/2 < X < 3/2) = F(3/2) - F(-1/2) = \Phi\left(\sqrt{6}(3/2+1/2)\right) - \Phi(0) =$

$$= \Phi\left(2\sqrt{6}\right) = \Phi(4{,}89) = 0{,}5.$$

Пример 3

Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в трапеции $ABCD$ (рис. 2).

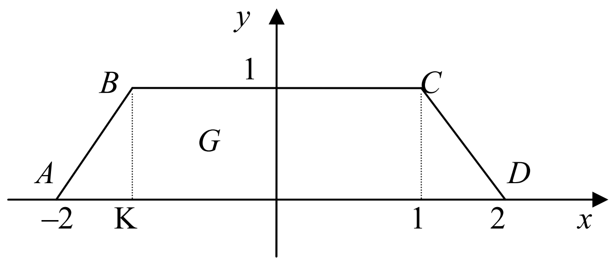


Рис. 2

Определить маргинальные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$, дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$, коэффициент корреляции r_{xy}. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? $A(-2{,}0); B(-1{,}1); C(1{,}1); D(2{,}0)$.

Решение

Плотность равномерного распределения (X,Y) имеет вид:

$f(x,y) = \begin{cases} 1/S, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G, \end{cases}$ где S – площадь области G.

В данном случае $S = S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot BK = 3$. Таким образом,

$$f(x,y)=\begin{cases}1/3, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

1. Находим $f_1(x)$ и $f_2(y)$ (см. п. 2.4), предварительно записав уравнения прямых AB и CD, проходящих через две точки:

$AB: y=2+x,\qquad CD: y=2-x.$

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{2+x}\mathrm{d}y=\dfrac{2+x}{3} & \text{при } -2\le x\le -1,\\ \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{1}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3} & \text{при } -1<x<1,\\ \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{2-x}\mathrm{d}y=\dfrac{2-x}{3} & \text{при } 1\le x\le 2,\\ 0 & \text{при } |x|>2.\end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{y-2}^{2-y}dx=\dfrac{4-2y}{3} & \text{при } 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{при } y<0 \text{ или } y>1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f_1(x)=\begin{cases}(2+x)/3 & \text{при } x\in[-2,-1],\\ 1/3 & \text{при } x\in(-1,1),\\ (2-x)/3 & \text{при } x\in[1,2],\\ 0 & \text{при } x\notin[-2,2]\end{cases}\quad \text{и}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}(4-2y/3) & \text{при } y\in[0,1],\\ 0 & \text{при } y\notin[0,1].\end{cases}$$

Проверка: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=1$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_2(y)\mathrm{d}y=1$.

2. $M(X)$ и $M(Y)$ находим, используя двумерное распределение или распределения составляющих (см. п. 2.6., табл. 2) и учитывая при этом,

что все возможные значения (X,Y) принадлежат области G:

$$M(X)=\iint_G x\frac{1}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-2}^{2-y}x\mathrm{d}x=0$$

или $$M(X)=\int_{-2}^{-1}x\frac{2+x}{3}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_1^2 x\frac{2-x}{3}\mathrm{d}x=0.$$

Результат закономерен, так как область G симметрична относительно оси OY.

$$M(Y)=\iint_G y\frac{1}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{y-2}^{2-y}\mathrm{d}x=\frac{4}{9}\ \text{или}\ M(Y)=\int_0^1 y\frac{4-2y}{3}\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

3. $D(X)$ и $D(Y)$ находим рассуждая аналогично, но используем не формулы табл. 2, а более удобные для вычисления дисперсии формулы (см. п. 2.2):

$$D(X)=\iint_G x^2\frac{1}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-[M(X)]^2=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-2}^{2-y}x^2\mathrm{d}x=\frac{6}{5}$$

или $$D(X)=\int_{-2}^{-1}x^2\frac{2+x}{3}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\frac{2-x}{3}\mathrm{d}x=\frac{6}{5}.$$

$$D(Y)=\iint_G y^2\frac{1}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-[M(Y)]^2=\frac{1}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y\int_{y-2}^{2-y}\mathrm{d}x-\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{13}{162}$$

или $$D(Y)=\int_0^1 y^2\frac{4-2y}{3}\mathrm{d}y-\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{13}{162}.$$

4. Для вычисления r_{xy} находим μ_{xy} (см. п. 2.6), учитывая при этом, что все возможные значения (X,Y) принадлежат области G.

$$\mu_{xy}=\iint_G xy\frac{1}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-M(X)M(Y)=\frac{1}{3}\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{y-2}^{2-y}x\mathrm{d}x=0.$$

Следовательно, $r_{xy}=0$ и случайные величины X и Y некоррелированы.

5. Находим условные плотности составляющих X и Y, чтобы ответить на вопрос, являются ли они независимыми (см. п. 2.5):

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} 1/(4-2y) \text{ при } \in [0,1], & y-2 \le x \le 2-y, \\ 0 & \text{при } y \notin [0,1]. \end{cases}$$

$$\psi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} 1/(2+x) \text{ при } x \in [-2,-1], & 0 \le y \le 2-x, \\ 1 \qquad \text{при} x \in (-1,1), & 0 \le y \le 1 \\ 1/(2-x) \text{ при } x \in [1,2], & 0 \le y \le 2-x \\ 0 \qquad \text{при } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi(x/y) \ne f_1(x)$ и $\psi(y/x) \ne f_2(y)$. Следовательно, случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 4

Дана плотность распределения $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & x \notin (0, \pi/2) \end{cases}$ случайной величины X. Найти плотность распределения $g(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной X.

Решение

Из условия задачи получаем зависимость между случайными величинами: $Y = X^2$.

1. Так как функция $y = x^2$ для рассматриваемых значений x $(0 < x < \pi/2)$ строго возрастающая, то $g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$ (см. п. 2.7).

Находим $x = \psi(y) = \sqrt{y}$ и $|\psi'(y)| = \left|\left(\sqrt{y}\right)'\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$. Учитывая, что $f(x) = \cos(x)$, получим $g(y) = \cos\sqrt{y}\,\dfrac{1}{2\sqrt{y}} = \dfrac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ в интервале $(0, \pi^2/4)$ и $g(y) = 0$ вне этого интервала (так как $y = x^2$ и $0 < x < \pi/2$, то $0 < y < \pi^2/4$).

Проверка: $\int\limits_0^{\pi^2/4} g(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \begin{matrix} y = t^2 \\ \mathrm{d}y = 2t\mathrm{d}t \\ 0 < t < \pi/2 \end{matrix} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\mathrm{d}t = 1$.

2. Находим математическое ожидание случайной величины Y, заданной плотностью распределения $g(y)$ (см. п. 2.2).

$$M(Y) = \int\limits_0^{\pi^2/4} y \cdot g(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi^2/4} y\frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y .$$

Интегрируя сначала с помощью подстановки $y = t^2$, а затем дважды по частям, получим $M(Y) = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

3. Находим дисперсию случайной величины Y, заданной плотностью распределения $g(y)$ (см. п. 2.2).

$$D(Y) = \int\limits_0^{\pi^2/4} y^2 g(y)\mathrm{d}y - [M(Y)]^2 = \int\limits_0^{\pi^2/4} y^2\frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y - \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)^2 .$$

Интегрируя сначала с помощью подстановки $y = t^2$, а затем четыре раза по частям, получим $\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi^2/4} \frac{y^2\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$.

Окончательно $D(Y) = 20 - 2\pi^2$.

Заметим, что $M(Y)$ и $D(Y)$ могут выражаться и через закон распределения случайного аргумента X (см. п. 2.8). В данном примере $M(Y) = \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x\mathrm{d}x$ и $D(Y) = \int\limits_0^{\pi/2} x^4 \cos x\mathrm{d}x - [M(Y)]^2$.

Список литературы

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1979. – 400 с.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1977. – 480 с.

3. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Вышэйш. шк., 1984. – 222 с.

4. Зубков, А. М. Сборник задач по теории вероятностей / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1989. – 318 с.

5. Коваленко, И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – М. : Высш. шк., 1982. – 256 с.

6. Лихолетов, И. И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич. – Минск : Вышэйш. шк., 1969. – 452 с.

7. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч. 2 / под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Вышэйш. шк., 1990. – 400 с.

8. Севастьянов, Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики / Б. А. Севастьянов. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

9. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / под ред. Г. И. Кручковича. – Минск : Вышэйш. шк., 1970. – 510 с.

10. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / под ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1984. – 607 с.

11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А. А. Свешникова. – М. : Наука, 1970. – 656 с.

12. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) / В. Ф. Чудесенко. – М. : Высш. шк., 1983. – 112 с.

Значения функций

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \text{ и } \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$$

Таблица П1.1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3652	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
I8	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531

Продолжение табл. П1.1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3883	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967

Окончание табл. П1.1

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	499841
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	499928
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
69	0957	4545	38	0235	4913			

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения функции распределения Пуассона $P(\xi = m) = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$

А. При *a*, равном 0,1... 1,0

Таблица П2.1

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49658	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,09048	0,16375	0,22224	0,26813	0,30326	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14378	0,16466	0,18394
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4	0,00000	0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112	0,01533
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00068	0,00123	0,00200	0,00307
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8							0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
9										0,00000

Б. При *a,* равном 2,0... 12,0

Таблица П2.2

m \ a	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0
0	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00004	0,00001
1	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045	0,00007
2	0,27067	0,22404	0,14152	0,08422	0,04462	0,02234	0,01074	0,00500	0,00227	0,00044
3	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757	0,00177
4	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892	0,00531
5	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783	0,01274
6	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306	0,02548
7	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008	0,04368
8	0,00090	0,00810	0,02977	0,06428	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260	0,06552
9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511	0,08736
10	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07099	0,09926	0,11858	0,12511	0,10484
11	0,00001	0,00022	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374	0,11437
12		0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07276	0,09478	0,11437
13		0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291	0,10557
14			0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238	0,05203	0,09049
15			0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472	0,07239
16				0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170	0,05429

Окончание табл. П2.2

m \ a	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0
17				0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276	0,03832
18					0,00004	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709	0,02555
19					0,00001	0,00008	0,00040	0,00137	0,00373	0,01614
20						0,00003	0,00016	0,00062	0,00187	0,00968
21						0,00001	0,00006	0,00026	0,00089	0,00553
22							0,00002	0,00011	0,00040	0,00302
23							0,00001	0,00004	0,00018	0,00158
24								0,00002	0,00007	0,00079
25								0,00001	0,00003	0,00038
26									0,00001	0,00017
27										0,00008
28										0,00003
29										0,00001

Значения функции $P(\xi \le m_0) = \sum_{m=0}^{m_0} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$

А. При a, равном 0,1... 0,6

Таблица П3.1

m_0 \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996390	0,992074	0,985612	0,977885
3	0,999996	0,999943	0,999724	0,999224	0,998248	0,997642
4	1,000000	0,999998	0,999974	0,999939	0,999828	0,999606
5	1	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1	1	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1	1	1	1	1,000000	1,000000

Б. При a, равном 0,7...3,0

Таблица П3.2

m_0 \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,988542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999998	0,999998	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,999954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999996
15						1,000000

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Васюнина Ольга Борисовна,
Романова Людмила Дмитриевна,
Самуйлова Светлана Валентиновна

Расчетные задания
по теории вероятностей

Редактор *Е. П. Мухина*
Технический редактор *Н. А. Вьялкова*
Корректор *Н. А. Сидельникова*
Компьютерная верстка *М. Б. Жучковой*

Сдано в производство 27.10.09. Формат 60х84^1/16.
Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 8,04.
Тираж 150. Заказ № 531. "С" 138.

Издательство ПГУ.
440026, Пенза, Красная, 40.